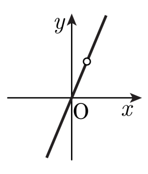
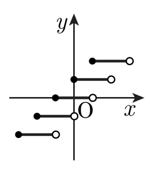
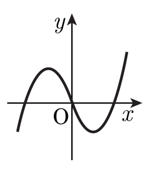
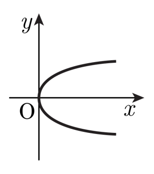
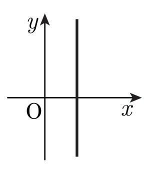
1. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x에서 y로의 함수인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

①은 대응되지 못하는 x의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x의 한 값에
y의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

2. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \to Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는 집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

3. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$
$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로
$a + b = 0$, 즉 $b = -a$
$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$
$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$
$= a^2x - a^2 - a = x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$
$\therefore a = -1$
즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

4. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2　② -3　③ -4　④ -5　⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$
$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$
그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로
$a = -2, b = 2$
$\therefore ab = -4$

5. 두 함수 $f(x)=ax+b,\ g(x)=ax+c$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a=1$ 또는 $b=c$ ② $a=1$

③ $b=c$ ④ $a=0$ 또는 $b=c$

⑤ $a=0$

해설

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+c)$$
$$=a(ax+c)+b$$
$$=a^2x+ac+b$$

마찬가지로 $(g\circ f)(x)=a^2x+ab+c$

$\therefore\ ac+b=ab+c$

즉, $(a-1)(b-c)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $b=c$

6. 실수 전체의 집합 $\boldsymbol{R}$ 에서 $\boldsymbol{R}$ 로의 함수

$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로
$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1\ (x \geq 0) \\ -x-1\ (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

7. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

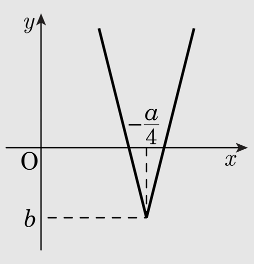
▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left|4\left(x + \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3$, $b = -2$

따라서 $a = -12$, $b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$

8. 함수 $y=|x+1|-|x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|x+1|-|x-3|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때

$y=-(x+1)+x-3=-4$

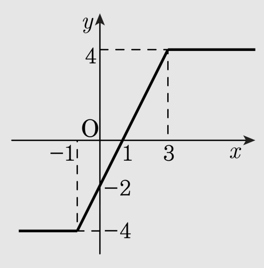
ii) $-1\le x<3$ 일 때

$y=x+1+x-3=2x-2$

iii) $x\ge 3$ 일 때

$y=x+1-(x-3)=4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

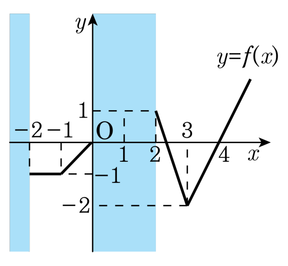


$M=4, m=-4$

$\therefore M-m=4-(-4)$

$=8$

9. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



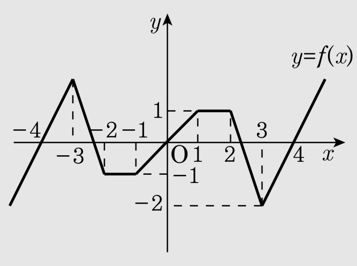
> $-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

10. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 10개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,

$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,

$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,

$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \le x < 4$ 일 때,

$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

11. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

ㄱ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

ㄴ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

ㄷ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

ㄴ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$이다.

ㄷ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

12. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ ……㉠

㉠에 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1) - 2$

$\therefore f(1) = 2$

㉠에 $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$ $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

13. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

14. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$ ② $\dfrac{1}{2008}$ ③ $\dfrac{1}{2009}$ ④ $\dfrac{1}{4017}$ ⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

15. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $\left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f \circ g)^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 $(f \circ g)(a) = 3$

$2a - 3 = 3$ 에서 $a = 3$

$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$

$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$

$h^{-1}(3) = b$ 놓으면 $h(b) = 3$

$2b + 1 = 3$

$\therefore b = 1$

$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = h^{-1}(3) = 1$

16. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \dfrac{100x + 200}{f(x)}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$

$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2(\because\ k > 0)$

$$\therefore\ (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2) = \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$

17. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

식 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=1,\ y=1$ 을 대입하면
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$
$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3f(1)$
$f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)=4f(1)$ 이다.
$\vdots$
$f(n-1)=(n-1)f(1)$ 이라 놓으면
$f(n)=f((n-1)+1)=f(n-1)+f(1)=nf(1)$
따라서 $f(30)=30f(1)=30\cdot 2=60$ 이다.

18. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} (x\text{는 짝수}) \end{cases}$ 로 정의할 때, $f(f(x)) = 2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$에서 $f(x) = a$로 놓으면 $f(a) = 2$

ⅰ) a가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ⅱ) a가 짝수일 때 $f(a) = \dfrac{a}{2} = 2 \ \therefore a = 4$

ⅰ), ⅱ)에서 $f(x) = 1$ *or* $f(x) = 4$

ⅲ) $f(x) = 1$일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고
x가 짝수이면 $x = 2$

ⅳ) $f(x) = 4$일 때 x가 홀수이면 $x = 3$
x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2,\ 3,\ 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

19. 방정식 $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ 3

해설

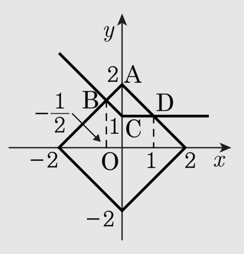
$y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x|=x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(x-x)+1=1$$

(ii) $x<0$ 일 때, $|x|=-x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(-x-x)+1=-x+1$$



따라서 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 과 $|x|+|y|=2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}$$