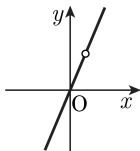
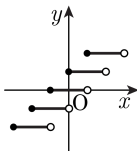


1. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x 에서 y 로의 함수인 것은?

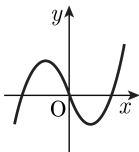
①



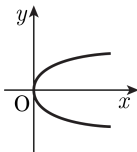
②



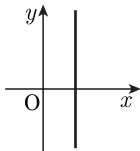
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x 의 값이 존재하고

②, ④, ⑤는 x 의 한 값에

y 의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

2. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- ① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

3. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면

$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로

양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$

$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)

즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로

$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로

$a + b = 0$, 즉 $b = -a$

$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$

$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$

$= a^2x - a^2 - a = x$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$

$\therefore a = -1$

즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

4. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

5. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 가 } f^{-1}(2) = -3 \text{ 을 만족시킬 때, } f(5) \text{ 의}$$

값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f^{-1}(2) = -3$ 에서 $f(-3) = 2$ 이므로

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{ 이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

7. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left| 4 \left(x + \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향

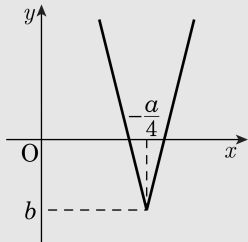
으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음
그림과 같다.

따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3, b = -2$

따라서 $a = -12, b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$



8. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

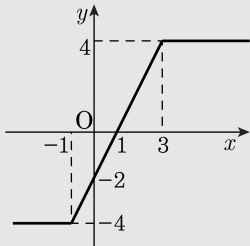
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

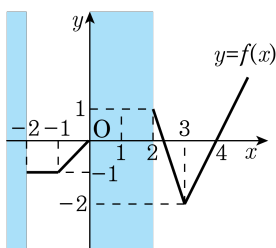
$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



9. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$ 에 대한 설명이다. M , N 의 합을 구하여라.



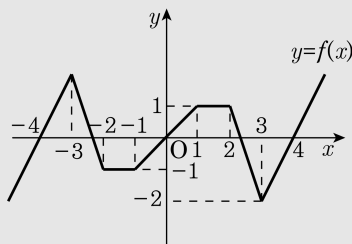
$-4 \leq x \leq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 M 이고, $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 N 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $M = 2$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $N = 1$ 이다.
 $\therefore M + N = 3$

10. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2} \right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 10개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$-2 \leq \frac{x}{2} < -1 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = -2$$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 0 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = -1$$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = 0$$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \text{ 이므로 } y = \left[\frac{x}{2} \right] = 1$$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

11. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$ 따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4, f(x) \text{는 정수}\}$ 이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1, x_2 = 3$ 일 때

$$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$$

$$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0 \text{ 이므로}$$

$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

12. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) - 2$$

$$\therefore f(1) = 2$$

⑦에 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

13. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

14. $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\frac{1}{2007}$

② $\frac{1}{2008}$

③ $\frac{1}{2009}$

④ $\frac{1}{4017}$

⑤ $\frac{1}{4018}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 에서}$$

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

15. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)^{-1}(3) = a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3$$

$$2a - 3 = 3 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$$

$$h^{-1}(3) = b \text{ 놓으면 } h(b) = 3$$

$$2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = h^{-1}(3) = 1$$

16. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \frac{100x + 200}{f(x)}$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$$

$$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2 (\because k > 0)$$

$$\therefore (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2)$$

$$= \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$

17. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

식 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서

$x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$$

$$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 4f(1) \text{ 이다.}$$

$\vdots$

$f(n-1) = (n-1)f(1)$ 이라 놓으면

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1) + f(1) = nf(1)$$

따라서 $f(30) = 30f(1) = 30 \cdot 2 = 60$ 이다.

18. 자연수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \text{는 홀수}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{는 짝수}) \end{cases} \quad \text{로 정의할 때, } f(f(x)) = 2 \text{ 를 만족시키}$$

는 x 의 값들의 합은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$ 에서 $f(x) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a 가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a 가 짝수일 때 $f(a) = \frac{a}{2} = 2 \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x 가 홀수이면 존재하지 않고

x 가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$ 일 때 x 가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

19. 방정식 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나뉘어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ $\frac{7}{5}$

⑤ 3

해설

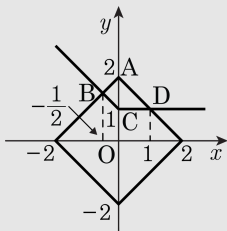
$$y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1 \text{ 에서}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}(x - x) + 1 = 1$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}(-x - x) + 1 = -x + 1$$



따라서 $y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1$ 과 $|x| + |y| = 2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4}$$