1. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$

(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

2. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2,\ k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　　② $k \leq 1$　　③ $k < 3$

④ $k \leq 3$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore\ k \leq 3$

4. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0$, $k>1$
$\therefore\ m=1$

5. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

6. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면
$(x^2+2x+1)+2=0, \quad (x+1)^2=-2$
$\therefore a=1,\ b=-2$
$\therefore a-b=3$

7. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

8. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

9. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

10. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot2+12=9$

11. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

12. 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, $a+b$의 값은?

① $1+\sqrt{5}$　　② $1-\sqrt{5}$　　③ $2+\sqrt{3}$
④ $2-\sqrt{3}$　　⑤ $1+\sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이다.
$ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$ 에서
$\frac{D}{4}=(b+i)^2-a(1+2i)=0$
위의 식을 정리하면
$(b^2-1-a)+(2b-2a)i=0$ ······㉠
$a,\ b$ 가 실수이므로 ㉠에서
$b^2-1-a=0$ ······㉡
$2b-2a=0$ ······㉢
㉢에서 $a=b$
$a=b$ 를 ㉡에 대입하면
$b^2-1-b=0$, $b^2-b-1=0$
$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
그런데 $a,\ b$ 가 양의 실수이므로
$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\therefore\ a+b=1+\sqrt{5}$

13. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

14. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}$ ……㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

15. $x^2 - 2x + 7 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ 을 계산하면?

① $-\frac{3}{49}$ ② $-\frac{10}{49}$ ③ $-\frac{10}{7}$ ④ 10 ⑤ 20

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 7$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= -\frac{10}{49}$

16. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

17. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0$ ⋯㉠

$1-a+c=0$ ⋯㉡

㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

18. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

19. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

20. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① -2　② -4　③ -8　④ -14　⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 α, β이므로
$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$
$\alpha^2+1=-3\alpha$, $\beta^2+1=-3\beta$
$\therefore\ (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$
$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$
$=-14\alpha\beta$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로
(주어진 식)$=-14$