1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(2)$, $\mathrm{Q}(x)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$이고, x의 값을 α,β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

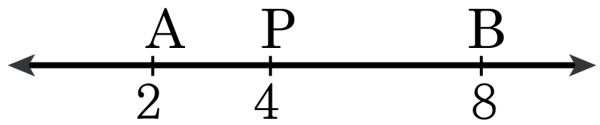
i) $x>2$일 때, $x-2=3 \ \therefore \ x=5$

ii) $x<2$일 때, $2-x=3 \ \therefore \ x=-1$

따라서 α,β의 값은 -1 또는 5

$\therefore \ \alpha^2+\beta^2=26$

2. 다음 수직선 위의 세 점 A, B, P 에 대하여 선분 AP 와 선분 PB 의 길이의 비는?



① 1 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 1 : 4

해설

선분 AP의 길이는 $4 - 2 = 2$,
선분 PB 의 길이는 $8 - 4 = 4$ 이다.
따라서 선분 AP와 선분 PB 의 길이의 비는
$2 : 4 = 1 : 2$ 이다.

3. 두 점 A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, −1), Q(0, 6)
② P(3.6, 0), Q(−1, 6)
③ P(3.6, 0), Q(0, 6)
④ P(2.4, 0), Q(0, 5)
⑤ P(3.6, 0), Q(−1, 2)

해설

A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P$(x, 0)$과 Q$(0, y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$
양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \quad \therefore$ P(3.6, 0)
$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$
양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore$ Q(0, 6)

4. 좌표평면 위의 점 $A(3,-2)$, $B(4,5)$, $C(-1,3)$을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x,y)라고 하면

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

$\therefore\ x=-2,\ y=-4$
따라서 점 D의 좌표는 $(-2,-4)$

5. A(1, 4), B(3, 3) 인 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (6, 7) 일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① (14, 14) ② (14, 5) ③ (4, 14)

④ (5, 17) ⑤ (6, 20)

해설

C 의 좌표를 (x, y) 라 할 때, 무게중심 구하는 공식을 이용하면,

$$\left(\frac{1+3+x}{3}, \frac{4+3+y}{3}\right) = (6, 7)$$

$\therefore (x, y) = (14, 14)$

6. 세 점 $\mathrm{A}(6,1)$, $\mathrm{B}(-1,2)$, $\mathrm{C}(2,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{O}(1,-2)$ ② $\mathrm{O}(2,\ 2)$ ③ $\mathrm{O}(2,-2)$

④ $\mathrm{O}(2,-1)$ ⑤ $\mathrm{O}(1,-1)$

해설

외심의 좌표를 $\mathrm{O}(a,b)$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 즉, $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$ 이므로

$(a-6)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$

$\therefore\ 7a-b=16\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OC}}^2$ 이므로

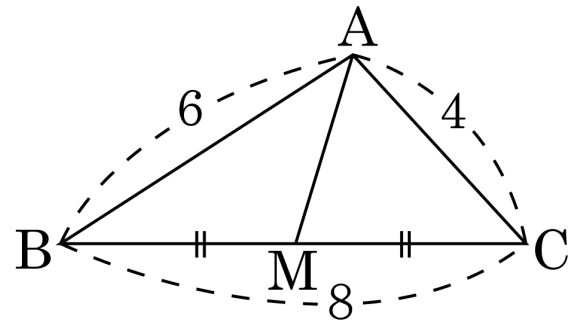
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$\therefore\ 2a-b=6\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=-2$

$\therefore \mathrm{O}(2,-2)$

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$

$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
$\therefore \overline{AM}^2 = 10$

8. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

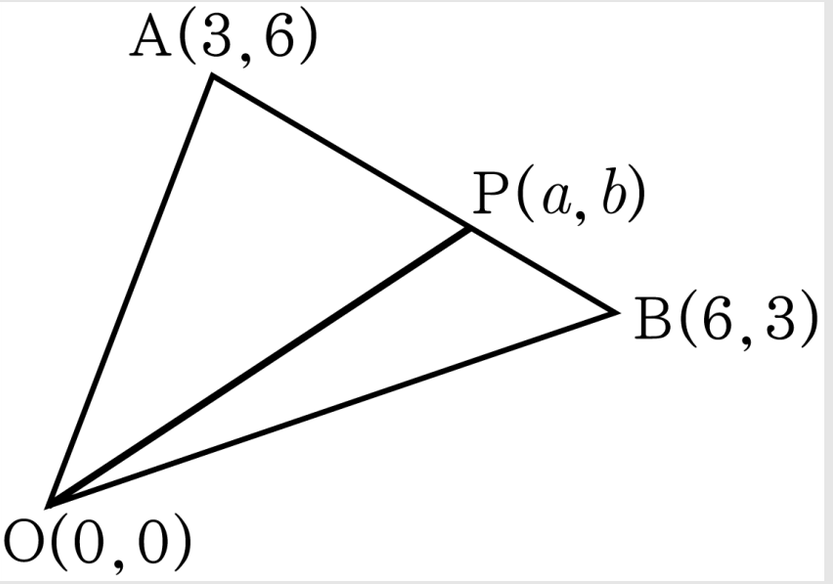
해설

다음 그림에서 $\triangle \mathrm{OAB}$ 와 $\triangle \mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로
$\triangle \mathrm{OAP} = 2\triangle \mathrm{OBP}$ 이려면
P는 두 점 A, B를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



9. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서

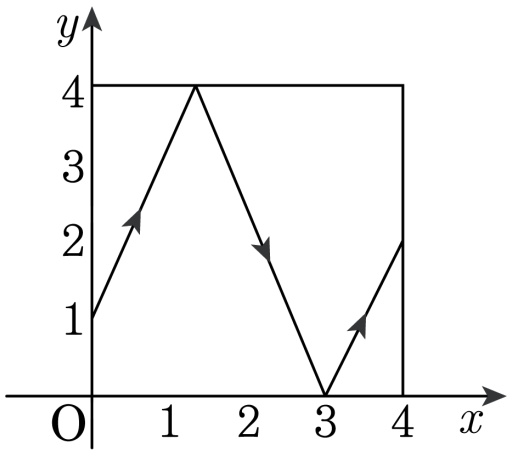
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$\therefore\ a = 2$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a 의 값의 합은

$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

10. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y=\frac{9}{4}x+1 \\ y=4 \end{cases}$ $\therefore\ x=\frac{4}{3}$

따라서, $\left(\frac{4}{3},4\right)$ 를 지난다.