

1. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?
- ① $k \leq -2$ ② $-1 \leq k \leq 2$ ③ $1 \leq k \leq 8$
④ $2 \leq k \leq 8$ ⑤ $k \leq 8$

해설

x^2 의 계수가 미지수 k 이므로
i) $k = 0$ 일 때 $8x + 2 \geq 0$ 에서 $x \geq -\frac{1}{4}$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하는 것은 아니다.
ii) $k \neq 0$ 일 때 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 의 해가 모든 실수이려면
 $k > 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 2k \leq 0, k^2 - 10k + 16 \leq 0,$
 $(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq k \leq 8 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$
i), ii)에서 $2 \leq k \leq 8$ 이다.

2. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2 - 2bx + a < 0$ 의 해는?

- ① $x < -7$ 또는 $x > -5$
- ② $-7 < x < -5$
- ③ $-7 < x < 5$
- ④ $5 < x < 7$
- ⑤ $x < 5$ 또는 $x > 7$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 이므로
 $(14x - 1)(10x - 1) < 0$, $140x^2 - 24x + 1 < 0$
 $-140x^2 + 24x - 1 > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c > 0$
 $\therefore a = -140, b = 24, c = -1 \cdots \textcircled{가}$
 $\textcircled{가}$ 를 $4cx^2 - 2bx + a < 0$ 에 대입하면
 $-4x^2 - 48x - 140 < 0$
 $x^2 + 12x + 35 > 0, (x + 7)(x + 5) > 0$
 $\therefore x < -7$ 또는 $x > -5$

3. 두 부등식 $2x - 1 > 0$, $(x + 1)(x - a) < 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이 되도록 하는 정수 a 의 값은? (단, $a > 1$)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$2x - 1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \dots\dots ①$$

$$(x + 1)(x - a) < 0$$

$$\therefore -1 < x < a \dots\dots ②$$

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2} < x < 3$ 이므로

$$\therefore a = 3$$

4. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 6

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$
 $f(4x - 1)$ 는 $f(x)$ 의 x 대신 $4x - 1$ 를 대입한 것과 같으므로
 $f(4x - 1) = k(4x - 1 - \alpha)(4x - 1 - \beta) = 0$ 의 근은
 $x = \frac{\alpha + 1}{4}, \frac{\beta + 1}{4}$
 $\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{4} = \frac{6 + 2}{4} = 2$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$
 $f(4x - 1) = 0$ 에서
 $4x - 1 = \alpha, 4x - 1 = \beta$
 $\therefore x = \frac{\alpha + 1}{4}, x = \frac{\beta + 1}{4},$
 $\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{4} = \frac{6 + 2}{4} = 2$

5. x 에 관한 이차부등식 $x^2 - (a-6)x + a-3 \leq 0$ 을 만족하는 실수 x 가 존재할 때, 실수 a 의 범위는?

- ① $4 \leq a \leq 12$ ② $a \leq 4, a \geq 12$ ③ $6 \leq a \leq 8$
④ $a \leq 6, a \geq 8$ ⑤ $4 \leq a \leq 8$

해설

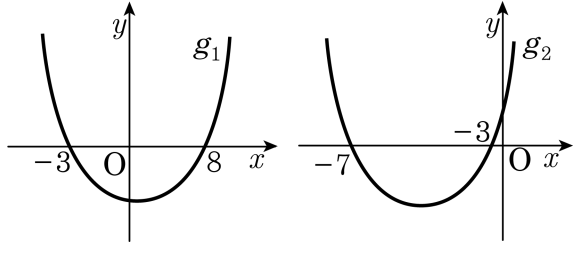
$x^2 - (a-6)x + a-3 \leq 0$ 의 실수해가 존재하려면

$$D = (a-6)^2 - 4(a-3) \geq 0$$

$$a^2 - 16a + 48 \geq 0, (a-4)(a-12) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 4, a \geq 12$$

6. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
 을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
 ($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
 따라서 만족하는 정수는 13 (개)

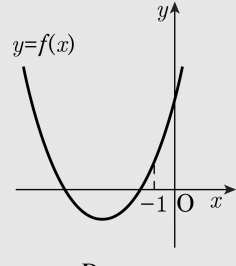
7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



- (i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) > 0$ 에서
 $k^2 + k - 6 > 0, (k + 3)(k - 2) > 0$
 $\therefore k < -3$ 또는 $k > 2$

- (ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

- (iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$
이상에서 $-7 < k < -1$
따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3개다.

8. $6[x]^2 - 31[x - 1] - 13 < 0$ 을 풀면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 3$

② $-2 \leq x < 5$

③ $0 \leq x < 3$

④ $1 \leq x < 5$

⑤ $1 \leq x < 6$

해설

$$n \leq [x] < n + 1 \text{에서}$$

$$n - 1 < [x - 1] < n \text{이므로}$$

$$[x - 1] = [x] - 1$$

$$\therefore 6[x]^2 - 31[x - 1] - 13$$

$$= 6[x]^2 - 31([x] - 1) - 13$$

$$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$$

$$\therefore (2[x] - 9)(3[x] - 2) < 0$$

$$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$$

$$\therefore 1 \leq [x] \leq 4 \text{이므로}$$

$$[x] = 1, 2, 3, 4$$

$$\therefore 1 \leq x < 5$$

9. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?
- ① $x \leq -3, x = -1, x \geq 1$ ② $x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
③ $x \leq -3, x \geq 1$ ④ $x \leq -1, x \geq 3$
⑤ $-3 \leq x \leq -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p, (x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
 $f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면, $f(p) > 0$ 이다.
 $-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은 $f(-2) \geq 0$ 이고
 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.
 $f(-2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
 $\therefore (x-1)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq 1, x \geq 3 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
 $f(2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$
 $\therefore (x+1)(x-1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1, x \geq 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $\therefore x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \leq -1, x \geq 3$

10. x 에 대한 방정식 $x^2 - 2kx + (2k^2 - 3k) = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2 \leq 8$ 를 만족하는 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 - 2kx + (2k^2 - 3k) = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (2k^2 - 3k) \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 3 \cdots \textcircled{1}$$

또, $\alpha + \beta = 2k$, $\alpha\beta = 2k^2 - 3k$ 이므로

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \leq 8$$

$$(2k)^2 - 4(2k^2 - 3k) \leq 8$$

$$k^2 - 3k + 2 \geq 0 \quad (k-1)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 1, \quad k \geq 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $0 \leq k \leq 1$ 또는 $2 \leq k \leq 3$

$$\therefore M = 3, \quad m = 0$$

$$\therefore M + m = 3$$