1. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$a \rightarrow \boxed{}$, $b \rightarrow \boxed{}$, $c \rightarrow \boxed{}$

Y의 원소 p, q, r, s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p, q, r, s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(개)

2. $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{2}{(x+4)(x+6)}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{1}{x}$　② $\dfrac{2}{x}$　③ $\dfrac{6}{x(x+6)}$
④ $\dfrac{2}{x(x+2)}$　⑤ $\dfrac{2}{x+2}$

해설

이항분리로 푼다.

$$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{6}{x(x+6)}$$

3. 다음 유리식을 간단히 하시오.

$$\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$$

① 1 ② x ③ $-x$ ④ $\frac{1}{x}$ ⑤ $-\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준식})=\frac{\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 $(1-x)(1+x)$ 를 곱하면

(준식)

$$=\frac{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)+\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)-\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

4. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것은?

① $ac = bd$ ② $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ③ $a + b = c + d$

④ $a - c = b - d$ ⑤ $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

해설

$a : b = c : d$이면 $ad = bc$

5. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3$ 에서 점근선은

$x = -1,\ y = 3$

$a = -1,\ b = 3$

$\therefore\ a + b = 2$

6. $1 < a < 4$일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$
$= |a-4| + |a-1|$
$= -a + 4 + a - 1 \quad = 3$

7. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족
$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$
따라서 $a = 1,\ b = 0$
2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$
$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$
따라서 $a = -1,\ b = 2$
1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

8. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

9. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f \circ g = g \circ f$에서 $2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

10. 함수 $f(x) = \dfrac{kx}{3x+2}$ 에 대하여 $f = f^{-1}$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -3　　② -2　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$y = \dfrac{kx}{3x+2}$ 로 놓으면 $3xy + 2y = kx$

$(3y-k)x = -2y$

$\therefore\ x = \dfrac{-2y}{3y-k}$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y = \dfrac{-2x}{3x-k}$

이 때, $f = f^{-1}$ 이므로 $\dfrac{kx}{3x+2} = \dfrac{-2x}{3x-k}$

$\therefore\ k = -2$

11. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

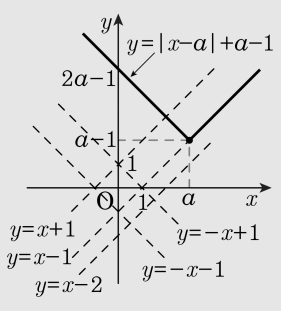
① $y=x+1$　　② $y=x-1$　　③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$　　⑤ $y=-x+1$

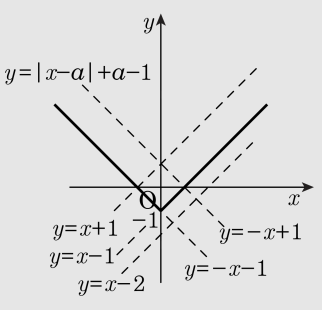
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

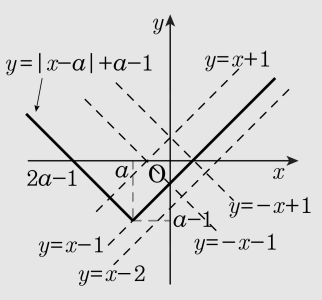
i) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ii) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



iii) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

12. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

13. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

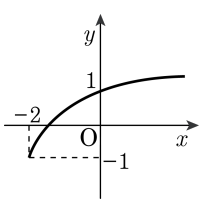
▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a} + b = \sqrt{-2x+2+a} + b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$과 같으므로
$2 + a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

14. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$　③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$　⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2$, $c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2} - 1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$
$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$x + 2 = \frac{1}{2}$
$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$

15. x에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{4}$　⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
두 그래프 $y = \sqrt{2x}$와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
$2x = m^2(x+1)^2$
$m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
$-2m^2 + 1 = 0,\ m^2 = \frac{1}{2}$
$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
따라서, m의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

16. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

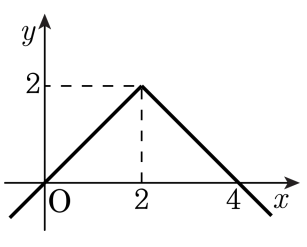
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

17. $y = f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$

$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.

18. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 이므로 $(g \circ f)(3x) = x$

$3x = t$ 로 치환하면 $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$

$3x + 2 = 2$ 일 때 $x = 0$

$\therefore\ g(2) = 0$

19. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수$f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 8$

해설

$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f$ 에서

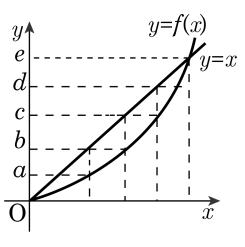
$g = f \circ f \cdots$ ㉠

$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a - 10 = 30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

20. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b) = k$라고 하면, $f(k) = b$

$\therefore\ k = c \qquad \therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c) = t$라고 하면, $f(t) = c$

$\therefore\ t = d \qquad \therefore\ (f \circ f)^{-1}(b) = d$

21. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a+b=0$　　② $a-b=0$　　③ $a+b=1$

④ $a-b=1$　　⑤ $a+b=2$

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x) = f(-x)$ 이다.
$f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 라 하면
$f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$
$= -b|x+1| + a|x-1| + 2$
$f(x) = f(-x)$ 에서 $a = -b$
$\therefore\ a+b=0$

22. $\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{d+a+b}=k$라 할 때, k가 취할 수 있는 모든 값의 합은?

① -1　② $-\dfrac{2}{3}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $-\dfrac{3}{4}$

해설

준식에서 $d=(a+b+c)k$,
$a=(b+c+d)k$,
$b=(c+d+a)k$,
$c=(d+a+b)k$ 이므로
변변 더하면 $a+b+c+d=3k(a+b+c+d)$

i) $a+b+c+d\neq 0$일 때, $k=\dfrac{1}{3}$

ii) $a+b+c+d=0$일 때, $a+b+c=-d$이므로

$$k=\frac{d}{a+b+c}=\frac{d}{-d}=-1$$

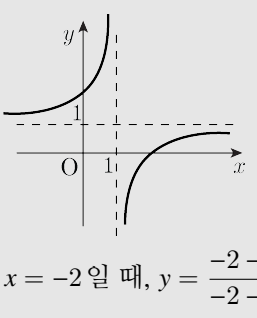
$\therefore$ k의 모든 값의 합은 $-\dfrac{2}{3}$

23. 분수함수 $y = \dfrac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2 \le y \le 0\}$
② $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$
③ $\{y \mid -2 \le y \le 4\}$
④ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$
⑤ $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

해설

$y = \dfrac{x-4}{x-1} = \dfrac{(x-1)-3}{x-1} = 1 + \dfrac{-3}{x-1}$



$x = -2$ 일 때, $y = \dfrac{-2-4}{-2-1} = 2$ 이고,

$x = 0$ 일 때, $y = \dfrac{-4}{-1} = 4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

24. $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{2-\sqrt{3}}+1$일 때, a^2+b^2-ab-a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2

④ $4-2\sqrt{2}$　　⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$b = \sqrt{2-\sqrt{3}}+1 = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+1$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+1$$
$$b-1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$\begin{aligned} a^2+b^2-ab-a &= (a-b)^2+ab-a \\ &= (a-b)^2+a(b-1) \\ &= (\sqrt{2}-1)^2+1 \\ &= 4-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

25. 임의의 양수 r 에 대하여 집합 $S_r = \{(x,\ y) \mid x^2+y^2 = r^2,\ x,\ y$는 정수$\}$ 이라 하자. 집합 S_r 의 원소의 개수를 $f(r)$ 이라 할 때,<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

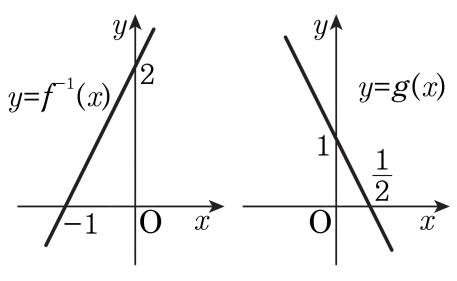
Ⅰ. $f(1)+f(2) = f(\sqrt{5})$
Ⅱ. $0 < r_1 < r_2$ 이면 $f(r_1) < f(r_2)$
Ⅲ. $1 \le r \le 3$ 의 범위에서 $f(r)$ 의 최소값은 4 이고 최대값은 8 이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

$f(r)$ 은 $x^2+y^2=r^2$ 위의 정수 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수이다.
Ⅰ. $r=1$ 일 때 순서쌍은
$(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ 이므로
$\therefore f(1)=4$
$r=2$ 일 때 순서쌍은
$(2,0),\ (0,2),\ (-2,0),\ (0,-2)$ 이므로
$\therefore f(2)=4$
$r=\sqrt{5}$ 일 때 순서쌍은
$(1,2),\ (2,1),\ (1,-2),\ (2,-1),(-1,-2),$
$(-2,-1),\ (-1,2),\ (-2,1)$ 이므로,
$\therefore\ f(\sqrt{5})=8$
Ⅱ. 반례 : $f(1)=4,\ \ f(\sqrt{3})=0$
Ⅲ. 반례 : $f(\sqrt{3})=0$

26. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



가 나

다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$ ② $y=f(x-1)$ ③ $y=-f(x-1)$
④ $y=f(x+1)$ ⑤ $y=-f(1-x)$

해설

그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나)의 그래프와 일치한다.
즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y=f^{-1}(-x)\cdots$㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$㉡이다.
㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.
$\therefore y=-f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

27. A, B, C세 사람은 각각 책 읽는 속도가 다르다. A가 어떤 책을 읽기 시작하고 나서 3시간 지났을 때, B가 같은 책을 읽기 시작하였다. 그로부터 5시간 후에는 A, B가 모두 총 쪽수의 $\frac{1}{3}$을 읽었다. C는 이 때부터 같은 책을 읽기 시작하여 B와 동시에 책을 다 읽었다. A가 다른 책을 6시간 걸려서 다 읽는다면 C가 그 책을 모두 읽는 데 걸리는 시간은?

① 1시간 50분　② 2시간 10분　③ 2시간 30분
④ 2시간 50분　⑤ 3시간 10분

해설

B는 책의 $\frac{1}{3}$을 5시간 걸려서 읽었으므로
책을 다 읽는 데는 15시간이 걸린다.
A는 책의 $\frac{1}{3}$을 읽는 데 B보다 3시간이 더 걸리므로
책을 다 읽는 데는 $(5+3)\times 3 = 24$(시간)이 걸린다.
또, B가 전체의 $\frac{2}{3}$를 읽는 데 걸린 시간과 C가 책 전체를 읽는 데 걸린 시간이 같으므로
C는 책을 다 읽는 데 $15\times\frac{2}{3} = 10$(시간)이 걸린다.
따라서 같은 책을 읽을 때, A와 C의 책 읽는 데 걸리는 시간의 비가 $24:10$이므로
C가 A가 읽은 다른 책을 읽는 데 걸리는 시간을 x라 하면
$24:10 = 6:x$
$\therefore x = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$(시간)
따라서 2시간 30분이 걸린다.

28. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2 + b^2 = 8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1 + \sqrt{3}$　　② $2 + \sqrt{3}$　　③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 - \sqrt{3}$　　⑤ $3 + 2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,

$b = 0,\ a^2 = 8\ a = 2\sqrt{2}$ (모순)

(ii) $a > 0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$

a의 정수부분을 k라 하면

$a = k + b\ (0 < b < 1)$이라 하면

$a^2 + b^2 = 8$에서 $b^2 = 8 - a^2$

$0 < 8 - a^2 < 1,\ \sqrt{7} < a < \sqrt{8}$

$\therefore k = 2 \qquad \therefore\ b = a - 2$

$a^2 + (a-2)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = 8$

$a^2 - 2a - 2 = 0,\ a = 1 \pm \sqrt{3}$

$\therefore\ a = 1 + \sqrt{3} (\because a > 0)$

29. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$　③ $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$
④ $\sqrt[3]{2}$　⑤ 1

해설

$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면
$a^3+b^3=10,\ ab=-3,$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$
$a+b=x$ 라고 하면,
$x^3+9x-10=0,$
$(x-1)(x^2+x+10)=0$
$\therefore\ x=1$

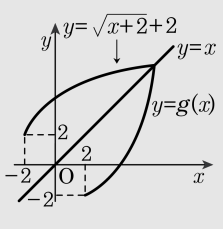
30. 무리함수 $y = \sqrt{x+2}+2$의 역함수를 $y = g(x)$라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2}+2,\ y = g(x)$의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y = x$위에 있다.



즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근은
$y = x$를 만족한다. $(\alpha = \beta)$
따라서, $y = \sqrt{x+2}+2$ 와 $y = x$를 연립하면 된다.
$x = \sqrt{x+2}+2$ 에서 $x - 2 = \sqrt{x+2}$
$x^2 - 4x + 4 = x + 2$
$x^2 - 5x + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$
$\therefore\ \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha\ (\because \alpha = \beta)$
$= -2$