

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\text{반지름 } r = \overline{OA} = \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

3. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k \leq 4$

② $\frac{1}{4} \leq k \leq 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(k - 4)k > 0$$

$$\Rightarrow k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

4. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm ② 10 cm ③ 11 cm ④ 12 cm ⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는

13 cm 이다.

공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$

5. 도형 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 5$

④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$

⑤ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$

해설

$$x-2=x' \quad y+1=y'$$

라 하고 주어진 식에 대입한다.

$$\Rightarrow (x'+2+1)^2 + (y'-1-2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (x'+3)^2 + (y'-3)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$$

6. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
 $(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
 $(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
 $\therefore a = 2$

7. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동

한

점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여

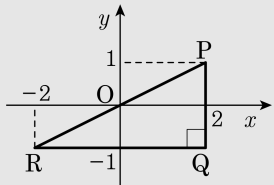
대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을

꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



8. 두 집합 $A = \{x \mid a \leq 2x + 1 \leq 9\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$ 가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$a \leq 2x + 1 \leq 9$ 에서

$a - 1 \leq 2x \leq 8, \frac{a - 1}{2} \leq x \leq 4$

$\therefore A = \left\{ x \mid \frac{a - 1}{2} \leq x \leq 4 \right\},$

$B = \{x \mid -2 \leq x \leq b\}$

이때, $A = B$ 이므로

$\frac{a - 1}{2} = -2, b = 4$

$a = -3, b = 4$

$\therefore a + b = 1$

9. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

- ① 9 개 ② 11 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개)이다.

10. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

11. 두 원

$$A : x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0 ,$$

$$B : x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$$

에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원 A 의 중심을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(1 + a)x - y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 0)$ 을 지나야한다.

$$-1 - a + 1 = 0$$

$$\therefore a = 0$$

12. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$, $(x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4개

해설

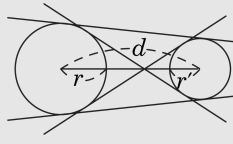
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하

여
두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

 $r + r' = 5, r \sim r' = 1 \quad d = 9$ 이므로

$r+r'=5, r \sim r' = 1 \mid d=9$ 이므로
 $r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
 4 개



13. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > -2$ ② $a \geq -1$ ③ $-1 \leq a < 2$
④ $-2 < a \leq 2$ ⑤ $-2 \leq a < 3$

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = a + 2$
중심이 (2, 1) 이고, 반지름이 $\sqrt{a + 2}$ 인 원이다.
 x 축과 만나려면 $\sqrt{a + 2} \geq 1 \cdots \textcircled{1}$
 y 축과 만나지 않으려면 $0 < \sqrt{a + 2} < 2 \cdots \textcircled{2}$
①, ②를 동시에 만족하므로
 $\therefore -1 \leq a < 2$

14. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

15. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

- ① $\frac{\pi}{2}$
- ② π
- ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$
$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$
$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi \doteq 2\pi$$

16. 다음은 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q 의 좌표 (x, y) 를 구하는 과정이다.

에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선
위에 있으므로 $\frac{y+b}{2} = \frac{x+a}{2}$
 $\therefore x - y = b - a \cdots \textcircled{1}$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로
 $\frac{y-b}{x-a} = \text{$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 x, y 를 구하면
 $x = \text{$, $y = \text{$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

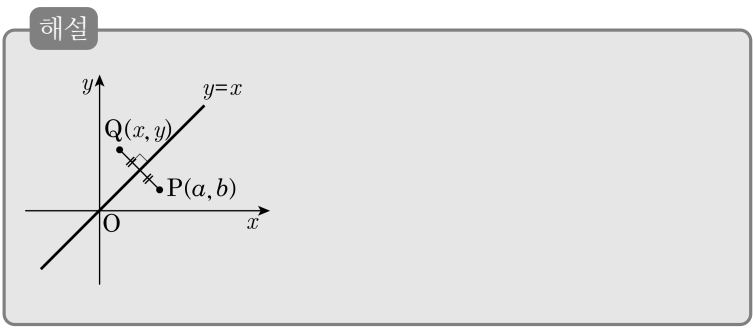
▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x$

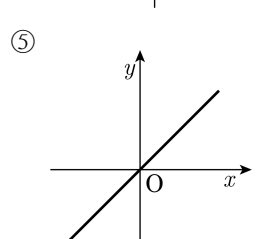
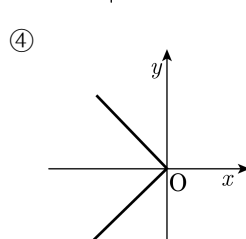
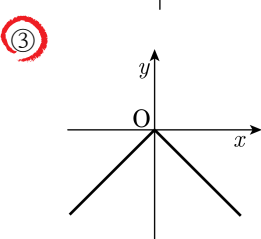
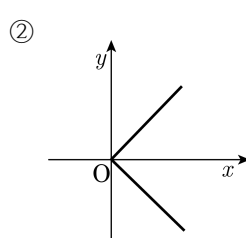
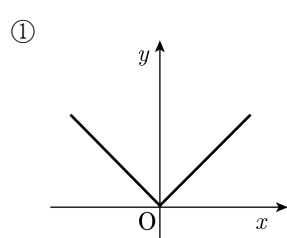
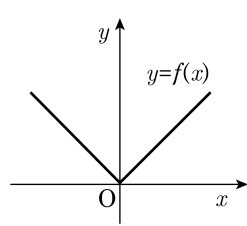
▷ 정답 : -1

▷ 정답 : b

▷ 정답 : a



17. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

18. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $x^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 2인 ④이다.

19. 집합 $A = \{(x, y) | ax - by = 12\}$ 에 대하여 $(6, 2) \in A$, $(-3, -2) \in A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 12

② 16

③ 20

④ 26

⑤ 30

해설

$(6, 2) \in A$ 이므로 $x = 6, y = 2$
 $6a - 2b = 12, 3a - b = 6 \cdots \textcircled{1}$
 $(-3, -2) \in A$ 이므로 $x = -3, y = -2$
 $-3a + 2b = 12 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $b = 18$
 $\textcircled{1}$ 에서 $3a - 18 = 6 \therefore a = 8$
 $\therefore a + b = 26$

20. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\} \subset \{1, 2, 3\}$
- ㉡

$\{a, b\} \in \{a, b, c\}$
- ㉢

$0 \in \emptyset$
- ㉤

$\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
- ㉥

$\emptyset \subset \{1\}$
- ㉦

$\emptyset \subset \emptyset$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉥

▷ 정답 : ㉦

해설

㉡

$\{a, b\} \in \{a, b, c\}$ 에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$ 를 써야 한다.

㉢

$0 \in \emptyset$ 에서는 $\emptyset \subset \{0\}$ 이어야 한다.

㉤

$\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$ 에서는 $\subset$ 를 써야한다.

㉦

공집합($\emptyset$)은 모든 집합의 부분집합이다.

21. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 8을 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ 에서 원소 2, 8를 제외한 $\{4, 6\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}$ 의 4개가 있으므로, 원소 2, 8을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 4, 6, 8\}$ 이다. 이 중 원소의 개수가 4개인 것은 $\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ 이다.

22. 양수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.'가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

' $x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$a - a^2 + 2 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

23. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim p \rightarrow r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $q \rightarrow \sim p$
- ② $\sim r \rightarrow p$
- ③ $q \rightarrow r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim q$
- ⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 대우
 $\frac{q \rightarrow \sim p^{(1)}}{\text{㉠}}$ 도 참이다.
 $\frac{\sim p \rightarrow r}{\text{㉡}}$ 가 참이면 대우 $\sim r \rightarrow p^{(2)}$ 도 참이다.
㉠, ㉡에서 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이고 $\sim p \rightarrow r$ 가 참이므로 $q \rightarrow r^{(3)}$ 도 참이다.
또한, $q \rightarrow r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim q^{(4)}$ 도 참이다.
따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

24. 좌표평면에서 점 P(1, 4) 를 다음 평행이동식 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$Q = (1 + m, 4 + n)$ 으로 나타낼 수 있다.
 $\overline{PQ}$ 의 기울기는 $y = 2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,
 $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2}, \frac{8+n}{2}\right)$ 은
 $y = 2x$ 위에 있다.
 $\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$
ii) $\frac{8+n}{2} = m + 2$
i) 과 ii) 를 연립하면, $m = \frac{8}{5}, n = -\frac{4}{5}$
 $\therefore m + n = \frac{4}{5}$

25. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이상 } 250 \text{ 이하 } 12 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$ 일 때, $n(B) - n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$n(A) = 12, \quad n(B) = 24$$

$$n(B) - n(A) = 24 - 12 = 12$$

26. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수의 개수는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 8의 약수이어야 한다. 따라서 $\square$ 는 1, 2, 4, 8의 4개이다.

27. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

- ① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$
 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

28. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

- ① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned}
 A \star B &= (A - B^c) \cup (B^c - A) \\
 &= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \text{ 이므로} \\
 (A \star B) \star A &= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c] \\
 &\quad \cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}] \\
 &= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A] \\
 &\quad \cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}] \\
 &= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}] \\
 &\quad \cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)] \\
 &= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)] \\
 &= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\} \\
 &= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\} \\
 &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B
 \end{aligned}$$

29. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \rightarrow p$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참
 $R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

30. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$
- ② $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ③ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$
- ④ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ⑤ $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 $(\sqrt{3})$ 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

31. $A_N = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수, } n \text{은 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, $n((A_M \cup A_N) - (A_M - A_N)) = 3$ 을 만족하는 N 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 25

▷ 정답 : 49

해설

$$\begin{aligned} & (A_M \cup A_N) - (A_M - A_N) \\ &= (A_M \cup A_N) \cap (A_M \cap A_N^c)^c \\ &= (A_M \cup A_N) \cap (A_M^c \cup A_N) \\ &= A_N \cup (A_M \cap A_M^c) \\ &= A_N \\ \therefore n(A_N) &= 3 \\ A_N &= \left\{x \mid \frac{n}{x} = k, k \text{는 자연수}\right\} \text{ 일 때,} \\ n(A_N) &= 3 \text{ 을 만족하는 } N \text{ 은 } 4, 9, 25, 49 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

32. 집합 A, B, P, Q 에 대하여 $n(P - Q) = 7$, $n((P - Q) \cap (A - B)) = 5$,
 $n((P \cap Q^c) \cup (A \cap B^c)) = 10$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$P - Q = X$, $A - B = Y$ 로 치환해 보면
 $n(X) = 7$, $n(X \cap Y) = 5$, $n(X \cup Y) = 10$,
 $n(Y) = n(X \cup Y) - n(X) + n(X \cap Y) = 10 - 7 + 5 = 8$,
 $\therefore n(A - B) = 8$

33. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$