1. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

2. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$

④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로

$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=\mathrm{r}$$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

3. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k \le 4$

② $\frac{1}{4} \le k \le 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-k)^2=\frac{k^2}{4}-k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4}-k>0$ 이 성립해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(k-4)k>0$

$\Rightarrow \quad k<0$ 또는 $k>4$

4. 반지름의 길이가 각각 $4\,\mathrm{cm}$, $9\,\mathrm{cm}$ 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① $8\,\mathrm{cm}$ ② $10\,\mathrm{cm}$ ③ $11\,\mathrm{cm}$ ④ $12\,\mathrm{cm}$ ⑤ $14\,\mathrm{cm}$

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
$13\,\mathrm{cm}$ 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2-(9-4)^2}=12$

5. 도형 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
② $(x-2)^2+(y+2)^2=5$
③ $(x-3)^2+(y+3)^2=5$
④ $(x-3)^2+(y-3)^2=5$
⑤ $(x+3)^2+(y-3)^2=5$

해설

$x-2=x' \quad y+1=y'$

라 하고 주어진 식에 대입한다.

$\Rightarrow \quad (x'+2+1)^2+(y'-1-2)^2=5$

$\Rightarrow \quad (x'+3)^2+(y'-3)^2=5$

$\Rightarrow \quad (x+3)^2+(y-3)^2=5$

6. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

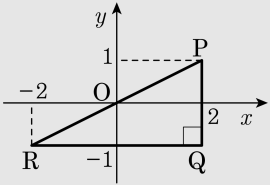
7. 점 P $(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P $(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q $(2, -1)$
또, 점 P $(2, 1)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 R 는 R $(-2, -1)$
따라서, 다음 그림에서 세 점
P $(2, 1)$, Q $(2, -1)$, R $(-2, -1)$ 을
꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는



$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

8. 두 집합 $A = \{x \mid a \le 2x+1 \le 9\}$, $B = \{x \mid -2 \le x \le b\}$가 서로 같을 때, 상수 a, b 의 합은? (단, 집합 A, B 는 공집합이 아니다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$a \le 2x+1 \le 9$에서

$a-1 \le 2x \le 8$, $\dfrac{a-1}{2} \le x \le 4$

$$\therefore A = \left\{x \,\middle|\, \frac{a-1}{2} \le x \le 4\right\},$$

$$B = \{x \mid -2 \le x \le b\}$$

이때, $A = B$이므로

$\dfrac{a-1}{2} = -2$, $b = 4$

$a = -3$, $b = 4$

$\therefore a + b = 1$

9. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개 ② 11 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개) 이다.

10. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

11. 두 원

A : $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$,

B : $x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$

에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원 A 의 중심을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(1 + a)x - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$

$(x + 1)^2 + y^2 = 5$ 이므로

㉠이 점 $(-1, 0)$을 지나야한다.

$-1 - a + 1 = 0$

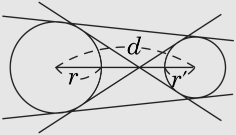
$\therefore\ a = 0$

12. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ____ 개

▷ **정답 :** 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여 두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면

$r+r'=5, r \sim r'=1$ $d=9$ 이므로

$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

13. 원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>-2$ ② $a\geq -1$ ③ $-1\leq a<2$

④ $-2<a\leq 2$ ⑤ $-2\leq a<3$

해설

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=a+2$

중심이 $(2,\ 1)$ 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.

x 축과 만나려면 $\sqrt{a+2}\geq 1 \cdots$ ①

y 축과 만나지 않으려면 $0<\sqrt{a+2}<2 \cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하므로

$\therefore\ -1\leq a<2$

14. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad (m+3)^2=10m^2+10$$

$$\Rightarrow \quad (3m-1)^2=0,\ m=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \quad \Rightarrow \quad 3m+n=6$

15. 점 A$(2, 4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ $\dfrac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 P(a, b), 선분 AP의 중점을 Q(x, y)라 하면

$$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a=2(x-1),\ b=2(y-2) \qquad \cdots ㉠$$

이 때 P(a, b)가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2-4a-2b+1=0 \qquad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$$

$$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$$

$$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)=1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\doteqdot 2\pi$

16. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y = x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\dfrac{x+a}{2},\ \dfrac{y+b}{2}\right)$ 은 직선 $\boxed{}$ 위에 있으므로 $\dfrac{y+b}{2} = \dfrac{x+a}{2}$
$\therefore\ x - y = b - a \cdots ①$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로
$\dfrac{y-b}{x-a} = \boxed{}$
①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
$x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$이다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

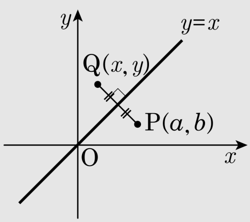
▷ 정답: $y = x$

▷ 정답: -1

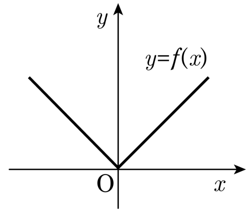
▷ 정답: b

▷ 정답: a

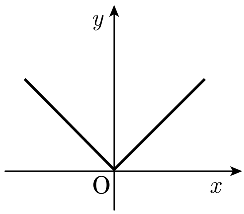
해설



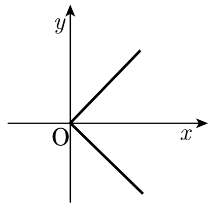
17. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중
$y=-f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



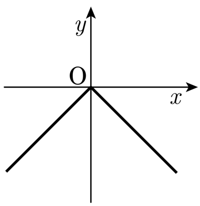
①



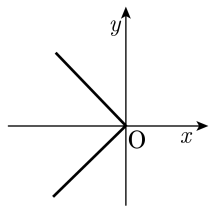
②



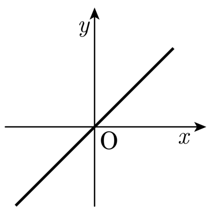
③



④



⑤



해설

$y=-f(-x)$, 즉 $-y=f(-x)$ 는 $y=f(x)$ 에
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로
$y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한 것이다.
따라서, $y=-f(-x)$ 의 그래프의 개형으로
옳은 것은 ③이다.

18. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

④ $x^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

19. 집합 $A=\{(x,\ y)|ax-by=12\}$에 대하여 $(6,\ 2)\in A$, $(-3,\ -2)\in A$ 일 때, $a+b$의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 26 ⑤ 30

해설

$(6,\ 2)\in A$이므로 $x=6$, $y=2$

$6a-2b=12,\ 3a-b=6\ \cdots$ ㉠

$(-3,\ -2)\in A$이므로 $x=-3,\ y=-2$

$-3a+2b=12\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $b=18$

㉠에서 $3a-18=6\ \therefore\ a=8$

$\therefore\ a+b=26$

20. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 3의 약수$\} \subset \{1, 2, 3\}$
㉡ $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$
㉢ $0 \in \varnothing$
㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의배수$\}$
㉤ $\varnothing \subset \{1\}$
㉥ $\varnothing \subset \varnothing$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

㉡ $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$를 써야 한다.
㉢ $0 \in \varnothing$에서는 $\varnothing \subset \{0\}$이어야 한다.
㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의 배수$\}$에서는 $\subset$를 써야한다.
㉥ 공집합$(\varnothing)$은 모든 집합의 부분집합이다.

21. 집합 $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 8 을 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 20

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에서 원소 2, 8 를 제외한 $\{4,\ 6\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{4,\ 6\}$의 4 개가 있으므로, 원소 2, 8 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합은 $\{2,\ 8\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{2,\ 6,\ 8\}$, $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 이다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ 이다.

22. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$

$(a + 1)(a - 2) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$

$a > 0$ 이므로 $a = 2$

23. 명제 $p \to \sim q$ 와 $\sim p \to r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \to \sim p$　　② $\sim r \to p$　　③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim q$　　⑤ $q \to \sim r$

해설

$p \to \sim q$ 가 참이면 대우

$\underbrace{q \to \sim p}_{㉠}$(①) 도 참이다.

$\underbrace{\sim p \to r}_{㉡}$ 가 참이면 대우 $\sim r \to p$(②) 도 참이다.

㉠, ㉡에서 $q \to \sim p$ 가 참이고 $\sim p \to r$ 가 참이므로 $q \to r$(③) 도 참이다.

또한, $q \to r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \to \sim q$(④) 도 참이다.

따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

24. 좌표평면에서 점 $P(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$Q=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{PQ}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5}$, $n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$

25. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 100 이상 250 이하 12의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 100 보다 작은 4의 배수$\}$일 때, $n(B) - n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$n(A) = 12, \quad n(B) = 24$

$n(B) - n(A) = 24 - 12 = 12$

26. 두 집합 $A=\{x \mid x$는8 의 배수$\}$,$B=\{x \mid x$는 $\boxed{}$의 배수$\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\boxed{}$안에 알맞은 자연수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A \subset B$ 이면 $\boxed{}$는 8 의 약수이어야 한다. 따라서 $\boxed{}$는 1, 2, 4, 8 의 4 개이다.

27. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$라 할 때, q의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$

$X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

28. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned} A \star B &= (A - B^c) \cup (B^c - A) \\ &= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \end{aligned}$$ 이므로

$(A \star B) \star A$

$$\begin{aligned} &= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c] \\ &\quad \cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}] \\ &= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A] \\ &\quad \cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}] \\ &= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}] \\ &\quad \cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)] \\ &= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)] \\ &= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\} \\ &= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B \end{aligned}$$

29. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 <u>아닌</u> 것은?

① $r \to p$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참
$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

30. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

31. $A_N = \{x | x$는 n의 약수, n은 100 이하의 자연수$\}$ 일 때, $n((A_M \cup A_N) - (A_M - A_N)) = 3$ 을 만족하는 N 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 25

▷ 정답 : 49

해설

$$\begin{aligned} & (A_M \cup A_N) - (A_M - A_N) \\ = & (A_M \cup A_N) \cap (A_M \cap A_N^c)^c \\ = & (A_M \cup A_N) \cap (A_M^c \cup A_N) \\ = & A_N \cup (A_M \cap A_M^c) \\ = & A_N \end{aligned}$$

$\therefore n(A_N) = 3$

$A_N = \left\{x | \frac{n}{x} = k,\ k\text{는 자연수}\right\}$ 일 때,

$n(A_N) = 3$ 을 만족하는 N 은 $4, 9, 25, 49$ 이다.

32. 집합 A, B, P, Q 에 대하여 $n(P-Q)=7$, $n((P-Q)\cap(A-B))=5$, $n((P\cap Q^c)\cup(A\cap B^c))=10$ 일 때, $n(A-B)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$P-Q=X,\ A-B=Y$ 로 치환해 보면

$n(X)=7,\ n(X\cap Y)=5,\ n(X\cup Y)=10$,

$n(Y)=n(X\cup Y)-n(X)+n(X\cap Y)=10-7+5=8$,

$\therefore n(A-B)=8$

33. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$일 때 성립)을 이용할 때, $x>0$이면 $8x^2+\frac{2}{x}$의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$　　② $2^3\sqrt{3}$　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$8x^2+\frac{2}{x} = 8x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$