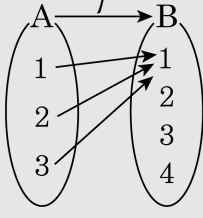


1. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 와 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 A 에서 B 로의 함수의 개수를 a , 일대일 함수의 개수를 b , 상수함수의 개수를 c 라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 64 ② 32 ③ 128 ④ 92 ⑤ 48

해설

- (1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로
 $\therefore a = 4 \times 4 \times 4 = 64$
(2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로
 $\therefore b = 4 \times 3 \times 2 = 24$
(3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로
 $\therefore c = 4$



$\therefore a + b + c = 92$

2. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

3. 두 집합 P, Q 에 대하여 집합의 연산 Δ 을 $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A\Delta B)\Delta C = \{1, 4, 9\}$

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$
 $A\Delta B = \{1\}$, $\{1\}\Delta C = \{1, 4, 9\}$ 를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.
 $\therefore a = 9$

4. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합일 때, 다음 중 반드시 유한집합을 모두 고르면? (정답 2개)
- ① $A^c \cap B$
- ② $(A \cap B)^c$
- ③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 X
- ④ $A - B$
- ⑤ $A^c \cap B^c = \emptyset$ 일 때, B^c

해설

$A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합이므로 B 는 무한집합이다.

- ① $A^c \cap B \rightarrow A^c$ 도 B 도 무한집합이지만, 두 무한집합의 교집합은 무한집합일 수도 유한집합일 수도 있다.
- ② $(A \cap B)^c \rightarrow A \cap B$ 가 유한집합이므로 $(A \cap B)^c$ 는 무한집합이다.
- ③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 $X \rightarrow B \subset X$ 이므로 무한집합이다.
- ④ $A - B$ 는 유한집합 차집합 무한집합이므로 항상 유한집합이다.
- ⑤ $A^c \cap B^c = \emptyset$ 일 때, $(A \cup B)^c = \emptyset$, $A \cup B = U$ 이므로 B^c 는 유한집합이다.

5. 우리반 학생을 40 명을 대상으로 조사를 하였더니 비행기를 타본 학생이 25 명, 배를 타 본 학생이 13 명이다. 비행기도 배도 타보지 못한 학생 수의 최댓값을 a , 최솟값을 b 이라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

조사한 학생의 집합을 U , 비행기를 타 본 학생의 집합을 A , 배를 타 본 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 25, n(B) = 13$$

$A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최대이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 $25 + 13 = 38$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최솟값}) = a = 40 - 38 = 2$$

$A \subset B$ 일 때, $n(A \cup B)$ 이 최소이므로 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 $n(A) = 25$ 이다.

$$\therefore (n((A \cup B)^c) \text{의 최댓값}) = b = 40 - 25 = 15$$

따라서 $a + b = 17$ 이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A$ ($x = 1, 2, 3$) 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$$2x - f(x) \in A \text{ 이면, } x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$$

$$\therefore f(1) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$$

$$\therefore f(2) = 1, f(2) = 2, f(2) = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$$

$$\therefore f(3) = 3$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

7. 함수 f 는 기함수이고 함수 g 는 우함수일 때, 다음 함수 중 기함수를 모두 고르면?

㉠ $f(x)g(x)$	㉡ $\{f(x)\}^2$
㉢ $(f \circ f)(x)$	㉣ $(g \circ g)(x)$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

f 는 기함수, g 는 우함수이므로

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

$$\text{㉠ } f(-x)g(-x) = \{-f(x)\}g(x) = -f(x)g(x)$$

따라서, $f(x)g(x)$ 는 기함수이다.

$$\text{㉡ } \{f(-x)\}^2 = \{-f(x)\}^2 = \{f(x)\}^2$$

따라서, $\{f(x)\}^2$ 는 우함수이다.

$$\text{㉢ } (f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -(f \circ f)(x)$$

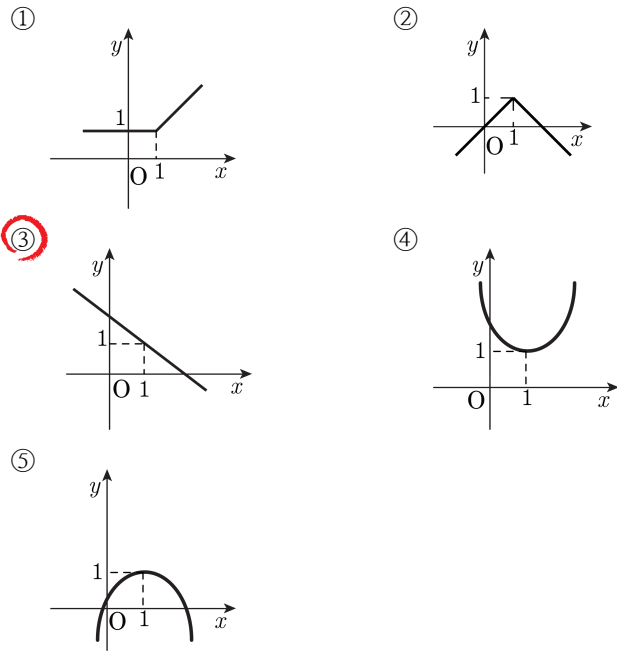
따라서, $(f \circ f)(x)$ 는 기함수이다.

$$\text{㉣ } (g \circ g)(-x) = g(g(-x)) = g(g(x)) = (g \circ g)(x)$$

따라서, $(g \circ g)(x)$ 는 우함수이다.

8. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?

- I. $f(1) = 1$
 II. 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{f(1+x) + f(1-x)}{2} = 1$



해설

$f(1+x)$, $f(1-x)$ 은 $x=1$ 에서
 같은 거리만큼 떨어져 있는
 두 개의 x 에 대한 함수값을 나타낸다.
 이때, 모든 실수 x 에 대하여 II가 성립한다는 것은
 $x=1$ 에서 같은 거리만큼 떨어져 있는
 두 개의 x 에 대한 함수값의 평균이
 항상 1 이라는 뜻이므로
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
 점(1, 1) 에 대하여 대칭이다.
 따라서, 보기의 그래프 중 점(1, 1) 에 대하여 대칭인 그래프는
 ③이다.

9. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 임의의 실수 a, b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 모두 고르면?

보기

- (㉠) $y = x$
- (㉡) $y = x^2 - 1$
- (㉢) $y = -x^2 + 1$

- ① (㉠) ② (㉠), (㉡) ③ (㉠), (㉢)
④ (㉡), (㉢) ⑤ (㉠), (㉡), (㉢)

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면
 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수
 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선
 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.
따라서 (㉠)은 직선, (㉡)은 아래로 볼록인 함수
(㉢)은 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는 (㉠), (㉡)이다.

10. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

- ㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.
㉡ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \leq x < n+1\}$ 의 원소의 개수는 n 개이다.
㉢ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \leq x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \geq 0$ 이면 $[x] \geq 0$ 이므로 $x[x] \geq 0$
 $x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로
 $f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)
㉡ 자연수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로
 $f(x) = [nx]$
 $n^2 \leq nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로
 $f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2, n^2 + 1, \dots, n^2 + (n-1)$ 로서
모두 n 개이다. (참)
㉢ 자연수 n 에 대하여 $-n \leq x < -n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로
각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \leq n^2$
따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는
 $n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \dots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$
로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)