1. 집합 $A=\{1,2,3\}$ 와 $B=\{1,2,3,4\}$ 에서 A 에서 B로의 함수의 개수를 a, 일대일 함수의 개수를 b, 상수함수의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 64　　② 32　　③ 128　　④ 92　　⑤ 48

해설

(1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로

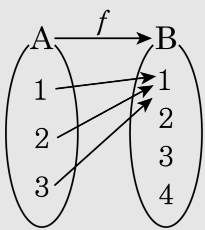
$\therefore\ a=4\times4\times4=64$

(2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로

$\therefore\ b=4\times3\times2=24$

(3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로

$\therefore c=4$



$\therefore\ a+b+c=92$

2. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : A \rightarrow A$에 대하여, 함수의 개수는 m개, 일대일 대응 함수의 개수는 n개, 상수 함수는 s개, 항등함수는 r개이다. $m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지) $\therefore\ m = 27$

일대일 대응의 개수는

$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지

$\therefore\ s = 3$

항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$

따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

3. 두 집합 P, Q 에 대하여 집합의 연산 $\triangle$ 을 $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A \triangle B) \triangle C = \{1, 4, 9\}$

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$

$A \triangle B = \{1\}$, $\{1\} \triangle C = \{1, 4, 9\}$를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.

$\therefore a = 9$

4. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합일 때, 다음 중 반드시 유한집합을 모두 고르면 ? (정답 2 개)

① $A^c \cap B$

② $(A \cap B)^c$

③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 X

④ $A - B$

⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, B^c

해설

$A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합이므로 B 는 무한집합이다.
① $A^c \cap B \to A^c$ 도 B 도 무한집합이지만, 두 무한집합의 교집합은 무한집합일 수도 유한집합일 수도 있다.
② $(A \cap B)^c \to A \cap B$ 가 유한집합이므로 $(A \cap B)^c$ 는 무한집합이다.
③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합$X \to B \subset X$ 이므로 무한집합이다.
④ $A - B$ 는 유한집합 차집합 무한집합이므로 항상 유한집합이다.
⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, $(A \cup B)^c = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이므로 B^c 는 유한집합이다.

5. 우리반 학생을 40 명을 대상으로 조사를 하였더니 비행기를 타본 학생이 25 명, 배를 타 본 학생이 13 명이다. 비행기도 배도 타보지 못한 학생 수의 최댓값을 a , 최솟값을 b 이라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

조사한 학생의 집합을 U , 비행기를 타 본 학생의 집합을 A , 배를 타 본 학생의 집합을 B 라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=25,\ n(B)=13$

$A\cap B=\varnothing$ 일 때, $n(A\cup B)$ 이 최대이므로 $n(A\cup B)$ 의 최댓값은 $25+13=38$ 이다.

$\therefore$ $(n((A\cup B)^c)$의 최솟값$)=a=40-38=2$

$A\subset B$ 일 때, $n(A\cup B)$ 이 최소이므로 $n(A\cup B)$ 의 최솟값은 $n(A)=25$ 이다.

$\therefore$ $(n((A\cup B)^c)$의 최댓값$)=b=40-25=15$

따라서 $a+b=17$ 이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 A 로의 함수 f 중에서 $2x - f(x) \in A(x = 1, 2, 3)$ 이 성립하는 것의 개수는?

① 3 개 ② 5 개 ③ 9 개 ④ 18 개 ⑤ 24 개

해설

$2x - f(x) \in A$ 이면, $x = 1 \Rightarrow 2 - f(1) \in A$

$\therefore\ f(1) = 1$

$x = 2 \Rightarrow 4 - f(2) \in A$

$\therefore\ f(2) = 1,\ f(2) = 2,\ f(2) = 3$

$x = 3 \Rightarrow 6 - f(3) \in A$

$\therefore\ f(3) = 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 f 의 개수는 3 개

7. 함수 f 는 기함수이고 함수 g 는 우함수일 때, 다음 함수 중 기함수를 모두 고르면?

㉠ $f(x)g(x)$	㉡ $\{f(x)\}^2$
㉢ $(f \circ f)(x)$	㉣ $(g \circ g)(x)$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢

해설

f 는 기함수, g 는 우함수이므로

$f(-x) = -f(x),\ g(-x) = g(x)$

㉠ $f(-x)g(-x) = \{-f(x)\}g(x) = -f(x)g(x)$
따라서, $f(x)g(x)$ 는 기함수이다.

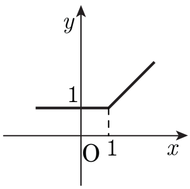
㉡ $\{f(-x)\}^2 = \{-f(x)\}^2 = \{f(x)\}^2$
따라서, $\{f(x)\}^2$ 는 우함수이다.

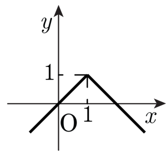
㉢ $(f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -(f \circ f)(x)$
따라서, $(f \circ f)(x)$ 는 기함수이다.

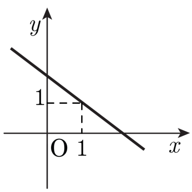
㉣ $(g \circ g)(-x) = g(g(-x)) = g(g(x)) = (g \circ g)(x)$
따라서, $(g \circ g)(x)$ 는 우함수이다.

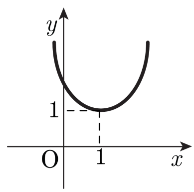
8. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때 다음 중 $y = f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?

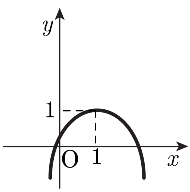
Ⅰ. $f(1) = 1$ Ⅱ. 모든 실수 x 에 대하여 $\dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = 1$

①


②


③


④


⑤


해설

$f(1+x)$, $f(1-x)$ 은 $x = 1$ 에서
같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값을 나타낸다.
이때, 모든 실수 x 에 대하여 Ⅱ가 성립한다는 것은
$x = 1$ 에서 같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값의 평균이
항상 1 이라는 뜻이므로
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭이다.
따라서, 보기의 그래프 중 점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭인 그래프는
③이다.

9. 다음 보기의 함수 $y = f(x)$ 중 임의의 실수 a , b 에 대하여 관계식 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키는 것을 모두 고르면?

보기

(가) $y = x$
(나) $y = x^2 - 1$
(다) $y = -x^2 + 1$

① (가) ② (가), (나) ③ (가), (다)
④ (나), (다) ⑤ ((가), (나), (다)

해설

곡선의 오목, 볼록에 따른 부등식을 살펴보면

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 아래로 볼록인 함수

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 직선

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 일 때는 위로 볼록인 함수이다.

따라서 (가)는 직선, (나)는 아래로 볼록인 함수
(다)는 위로 볼록인 함수 이므로 주어진 부등식을 만족하는 함수는 (가), (나)이다.

10. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.

㉡ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는n 개이다.

㉢ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$

$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$

그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로

$f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)

㉡ 자연수 n 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로

$f(x) = [nx]$

$n^2 \le nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로

$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서

모두 n 개이다. (참)

㉢ 자연수 n 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로

각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \le n^2$

따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는

$n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \cdots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$

로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)