1. 직선 $y = 2x - 5$ 를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하였다. 이때, a, b 사이의 관계식은?

① $2a - b = 5$　② $2a - b = -10$　③ $2a + b = 5$

④ $2a + b = 10$　⑤ $2a - b = 10$

해설

$y = 2x - 5$, x 축 방향으로 a , y 축 방향으로 b만큼 이동시키면,

$y - b = 2(x - a) - 5$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 2a + b - 5$

$\therefore \quad -2a + b - 5 = 5$

$\Rightarrow \quad 2a - b = -10$

2. 직선 $y=2x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y=2x-3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y=2x-3$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
직선의 방정식은
$y-b=2(x-a)-3$
직선의 방정식을 정리하면
$y=2x-2a-3+b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a+b-3=-3$, $2a=b$,
$\therefore \frac{b}{a}=2$

3. 점 (2, 3) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 (2, 3) 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 (2, 3) 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6만큼 평행이동 시킨 것과 같다
$\therefore \quad m+n=-4-6=-10$

4. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설

원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

5. 직선 $y = -3x + 2$을 다음과 같이 대칭 이동 할 대, 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① (x 축) : $y = 3x - 2$

② (y 축) : $y = -3x - 2$

③ (원점) : $y = 3x + 2$

④ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

① x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$
$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)

② y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)

③ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)

④ $y = x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow x = -3y + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)

⑤ $y = -x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

6. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

7. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

8. 직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 점 $(3,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $ax + by + 18 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

직선 $3x - 2y + 4 = 0$ 을 주어진 조건대로 대칭이동하면
$3(6 - x) - 2(2 - y) + 4 = 0$
$-3x + 2y + 18 = 0$
따라서, $a = -3$, $b = 2$
$\therefore\ a + b = -1$

9. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - a, y - b)$ 에 의하여 옮겼더니 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -(x^2 - 4x + 3) \ = -(x^2 - 4x + 4) - 3 + 4$

$= -(x - 2)^2 + 1$

평행이동 f에 의하여

$(y + b) = -(x + a - 2)^2 + 1$

$y = -(x + a - 2)^2 + 1 - b$ 와 $y = -x^2 + 4$가 같으므로,

$a - 2 = 0, \quad -b + 1 = 4$

$\therefore \ a = 2, \ b = -3$

$\therefore \ a + b = -1$

해설

$y = -(x - 2)^2 + 1$의 꼭지점 $(2, \ 1)$

$y = -x^2 + 4$의 꼭지점 $(0, \ 4)$

$f; (x, \ y) \rightarrow (x - 2, \ y + 3)$

$\therefore \ a = 2, \ b = -3$

$\therefore \ a + b = -1$

10. 포물선 $y = x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, y 축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $y = 2x + 3$에 접하게 된다. 이때, n의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

포물선 $y = x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$y = -x^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

포물선 ㉠을 y축 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y - n = -x^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

포물선 ㉡과 직선 $y = 2x + 3$이 접하여야 하므로

$x^2 + 2x + 3 - n = 0$에서 판별식

$\frac{D}{4} = 1 - (3 - n) = 0$ 이어야 하므로 $n = 2$

11. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(7, 10)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2 라고 하자. 두 $\mathrm{C}(0, -3)$, $\mathrm{D}(a,\ b)$ 가 원 C_2 의 지름의 양 끝일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

원 C_1 의 중심은 선분 AB 의 중점과 같으므로

이 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{1+7}{2}, \dfrac{2+10}{2}\right)$, 즉, $(4, 6)$

한 편, 원 C_2 의 중심은 원 C_1 의 중심을

x 축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는

$(4, -6)$ 이다.

이 때, 선분 CD 의 중점이 원 C_2 의 중심과

같으므로 $\left(\dfrac{0+a}{2}, \dfrac{-3+b}{2}\right)$ 는 $(4, -6)$ 과 같다.

따라서, $\dfrac{0+a}{2} = 4$ 에서 $a = 8$

$\dfrac{-3+b}{2} = -6$ 에서 $b = -9$

$\therefore a+b = -1$

12. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 이다.

13. 점 $(1,-2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4,-4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-4x+2$　② $y=4x+2$　③ $y=-4x+4$

④ $y=4x+4$　⑤ $y=-4x+6$

해설

$(1,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y+2=m(x-1)\ \cdots$ ①이라 하면

①식을 점 $(2,3)$에 대칭이동하면 (중점공식이용)

$x\to 4-x\ y\to 6-y$이므로

$6-y+2=m(4-x-1),\ y=m(x-3)+8\cdots$ ②

직선 ②를 x축에 대칭이동하면

$-y=m(x-3)+8\quad\cdots$ ③

직선 ③이 점 $(4,-4)$를 지나므로

$4=m(4-3)+8\ \therefore m=-4$

따라서 처음 직선의 방정식 ①은

$y+2=-4(x-1),\ y=-4x+2$

14. 점$(4,\ 3)$을 $y = 2x$ 에 대칭이동한 점의 좌표는?

① $(0,\ 5)$　② $(0,\ 1)$　③ $(-1,\ 2)$

④ $(0,\ -5)$　⑤ $(-1,\ -2)$

해설

점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$을 직선 $y = 2x$ 에 대칭 이동한 점을 $Q\ (\alpha,\ \beta)$ 라 할 때 직선 PQ 가 $y = 2x$ 에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$\frac{\beta - 3}{\alpha - 4} = -\frac{1}{2} \cdots$ ㉠

점 P ,Q 의 중점 $\left(\frac{\alpha + 4}{2},\ \frac{\beta + 3}{2}\right)$ 이

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$\frac{\beta + 3}{2} = 2 \times \frac{\alpha + 4}{2} \cdots$ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면

$\alpha = 0,\ \beta = 5$

따라서 $(0,\ 5)$ 이다.

15. 점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B$(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$ 위에 있으므로

$$4\cdot\frac{1+a}{2}-2\cdot\frac{2+b}{2}-5=0$$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\dfrac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

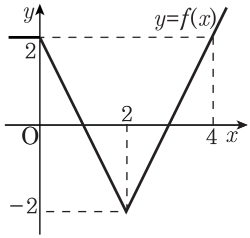
$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

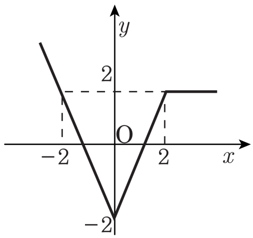
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

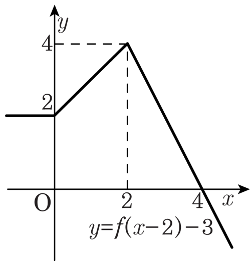
$\therefore$ B(3, 1)

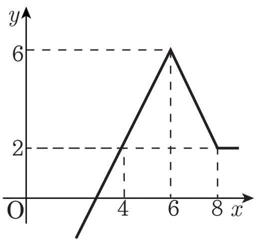
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

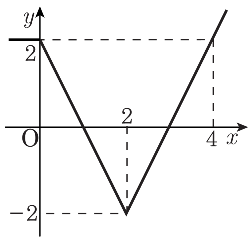
16. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

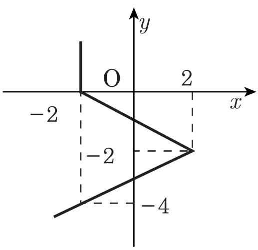


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

17. 다음 중 원 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=2$
② $x^2+y^2=3$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
④ $(x+1)^2+y^2=5$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 ①이다.

18. 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 $A(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

19. 원 $x^2+(y-1)^2=36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y=mx+n$ 은 점 $(0,1)$ 을 지난다.
$1=n \cdots$ ㉠
직선 $y=mx+n$를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y-2=m(x-1)+n$이 직선이
점 $(4,-3)$을 지나므로
$-5=3m+n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2, n=1$
$\therefore m+n=-2+1=-1$

20. 점 $(1,\ 4)$ 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를
지나므로 구하는 기울기는 $\dfrac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

21. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$　② $-\frac{7}{5}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면

$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3,2)$사이의 거리는 2이어야 한다.

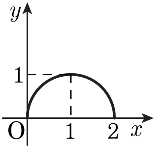
즉, $\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

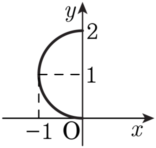
$9m^2+12m+4=4m^2+4$

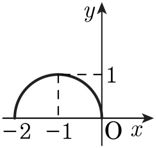
$\therefore\ 5m^2+12m=0$

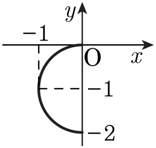
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

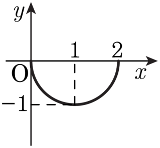
22. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

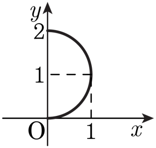


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

23. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.
㉡ $x \leq y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.

처음 점 P 의 좌표가 $(1,\ 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

조건에 따라 이동시켜보면,

$(1,0) \ \rightarrow \ (0,1) \ \rightarrow \ (1,1) \ \rightarrow \ (2,1)$

$\rightarrow \ (1,2) \ \rightarrow (2,2) \rightarrow \cdots$

$\therefore \ \ 3n-1$ 번째에 (n,n) 에 도착한다.

$\Rightarrow \ \ (3 \times 33) - 1 = 98$ 번째에 $(33,\ 33)$ 에 도착한다.

$\therefore$ 100 번째는 $(33,\ 34)$

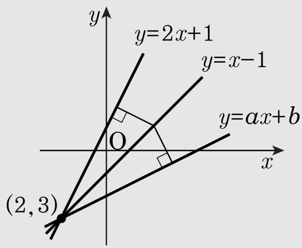
$\Rightarrow \ \ (a,b) = (33,34)$

$a+b = 67$

24. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$
② $x - 2y - 4 = 0$
③ $2x - 3y + 3 = 0$
④ $2x - 3y + 4 = 0$
⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과$y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.
$\therefore 3 = 2a + b$
ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x + 1,\ \ y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한
$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2,\ \ b = 1 \ \ 또는\ \ a = \frac{1}{2},\ \ b = -2$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x - 2$$

$(\because\ y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치$)$

25. 정점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$ 과 직선 $y=x+1$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $\sqrt{10}$　② $2\sqrt{10}$　③ $3\sqrt{10}$　④ $4\sqrt{10}$　⑤ $5\sqrt{10}$

해설

점$(x,\ y)$ 를 직선 $y=x+k$ 에 대하여
대칭이동하면 $(y-k,\ x+k)$
점 A 의 $y=x+1$ 에 대한 대칭점을 A' ,
점 A 의 x 축에 대한 대칭점을 A'' 이라 하면
$\mathrm{A}'(1,\ 4),\ \ \mathrm{A}''(3,\ -2)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=$
$\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$ 이므로
한편, $\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$
따라서, 최솟값은 $2\sqrt{10}$