1. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2-3x+2=a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$가 항상 성립할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, a, b, c, d는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x=0$을 대입하면 $a=2$
$x=1$을 대입하면 $b=-2$
$x=2$을 대입하면 $c=1$
3차항은 없으므로 $d=0$
$\therefore\ a+b+c+d=1$

2. 다음을 연립부등식으로 나타낸 것 중 옳은 것은?

어떤 수 x 에서 4를 빼면 10 보다 작고, x 의 3 배에 3 를 더하면 22 보다 작지 않다.

① $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3>22 \end{cases}$

② $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x-4>10 \\ 3x+3<22 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+4<10 \\ 3x-3\geq 22 \end{cases}$

해설

$$\begin{cases} x-4<10 \\ 3x+3\geq 22 \end{cases}$$

문제의 뜻에 맞게 세운다.

3. 부등식 $|x-2|+|x+3| \geq -2x+9$ 의 해는?

① $x \geq 2$ ② $-3 \leq x \leq 2$ ③ $1 < x \leq 2$

④ $x < 2$ ⑤ 해가 없다.

해설

(i) $x < -3$ 일 때,

$-2x-1 \geq -2x+9$, $-1 \geq 9$

따라서 이 범위에서 해가 존재하지 않는다.

(ii) $-3 \leq x < 2$ 일 때,

$5 \geq -2x+9$

$2x \geq 4$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서 해가 없다.

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$2x+1 \geq -2x+9$

$4x \geq 8$, $x \geq 2$ 따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$ 이다.

세 범위의 해를 연립하면 결과는

$\therefore x \geq 2$

4. $\overline{AB}=7,\ \overline{BC}=8,\ \overline{AC}=5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM}=4,\ \overline{AM}=x$ 이므로 중선정리에 의해

$7^2+5^2=2(x^2+4^2)\ \therefore\ x=\sqrt{21}$

5. 두 점 A(3, 6), B(a, 4) 의 중점 M 과 두 점 C(2, 3), D(-4, b) 의 중점 N 이 일치한다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

중점 M $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$ 과 중점 N $\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{3+\mathrm{b}}{2}\right)$ 이 일치하므로

$\frac{3+a}{2}=\frac{2+(-4)}{2}$, $3+a=-2$ $\therefore$ $a=-5$

$\frac{6+4}{2}=\frac{3+b}{2}$, $3+b=10$ $\therefore$ $b=7$

$\therefore$ $a+b=2$

6. 점 $(2, 5)$를 지나고 x 축에 평행한 직선이 $y = 3x - 4$ 와 만나는 교점의 좌표는?

① $(2, 2)$ ② $(3, 5)$ ③ $(4, 5)$

④ $(1, -1)$ ⑤ $(1, 2)$

해설

점 $(2, 5)$를 지나고
x 축에 평행한 직선의 방정식은
$y = 5$ 이므로 구하는 교점은 두 직선

$$\begin{cases} y = 5 & \cdots ㉠ \\ y = 3x - 4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 교점이다.

이 때, ㉠을 ㉡에 대입하면 $5 = 3x - 4$
$\therefore x = 3$
따라서, 교점의 좌표는 $(3, 5)$이다.

7. $(3k+2)x-(k+1)y+4=0$ 은 k 값에 관계없이 한 정점 $\mathrm{A}(a,\ b)$ 를 지난다. 이때, $a+b$ 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

준 식 : $(3x-y)k+2x-y+4=0$

이 식이 k 에 대한 항등식이므로

$3x-y=0\ \cdots$ ㉠

$2x-y+4=0\ \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $x=4,\ y=12$

$\therefore\ \mathrm{A}(a,\ b)=(4,\ 12)$

$\therefore\ a+b=4+12=16$

8. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

9. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=45$

해설

$f(-3)=(-3)^3-2(-3)^2+a=a-45=0$

$\therefore\ a=45$

10. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$ 이 다항식 $2x^2-x-3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값은 ?

① 3　② 1　③ −1　④ −2　⑤ −5

해설

$$2x^3+ax^2+bx+3=(2x^2-x-3)Q(x)$$
$$=(x+1)(2x-3)Q(x)$$

$x=-1$ 일 때, $-2+a-b+3=0$

$\therefore\ a-b=-1\cdots$ ㉠

$x=\dfrac{3}{2}$ 일 때, $\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+3=0$

$27+9a+6b+12=0$

$\therefore\ 3a+2b=-13\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5$

11. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4\geq 0 \quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

12. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1 < x+1 < x^2-3x+1 \\ x+3 > -x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $2a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{(가)} \underbrace{< x^2-3x+1}_{(나)} \\ x+3 > -x+2 \cdots (다) \end{cases}$$

(가)에서 $x^2-x-2<0$, $(x-2)(x+1)<0$

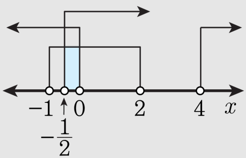
$\therefore -1 < x < 2$

(나)에서 $x^2-4x>0$, $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x > -\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2} < x < 0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$ 이므로 $2a+b=-1+0=-1$

14. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

15. 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 −1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① −2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$\therefore\ a = \dfrac{2-4}{1-(-3)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

또, y 절편이 −1 이므로 $b = -1$

$\therefore\ a + b = -\dfrac{1}{2} + (-1) = -\dfrac{3}{2}$

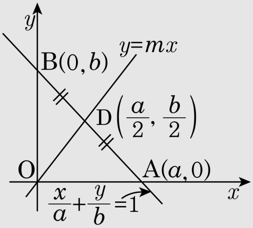
16. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, m의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① $\frac{b}{a}$　② $\frac{a}{b}$　③ $\frac{b}{2a}$　④ $\frac{a}{2b}$　⑤ $\frac{2a}{b}$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 $\mathrm{D}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$라 하면
$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBD}$이므로 직선 $y=mx$가 점 D를 지나야 한다.

$$\therefore m=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{b}{a}$$



17. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\quad),\ k < (\qquad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

18. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+c)$$
$$=x^3+cx^2+x+c$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

19. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4 \cdot (2x-1)^7$

$= a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면

계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서

$(1+2-3+2)^4 \cdot (2-1)^7 = 2^4 = 16$

20. x에 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 5이고, $x-3$으로 나누면 나머지가 9이다. 이 다항식을 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $x-1$　② $2x+3$　③ $4x-3$　④ $4x+3$　⑤ $3x-1$

해설

나머지 정리에서 $f(2)=5,\ f(3)=9$

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ 라 놓으면,

$f(2)=2a+b=5,\ f(3)=3a+b=9$을

연립하여 풀면 $a=4,\ b=-3$

$\therefore$ 나머지는 $4x-3$

21. 이차항의 계수가 모두 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가$(x+1)(x-2)(x-3)$인 두 이차식을 구하면?

① $(x+1)(x-2),\ (x-2)(x-3)$

② $(x+1)(x-2)(x-3),\ (x-2)$

③ $(x+1)^2,\ (x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x-3),\ (x-2)(x-3)$

⑤ $(x+1)(x-2),\ (x+1)(x-3)$

해설

두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수는 $(x-2)ab=(x+1)(x-2)(x-3)$
$a=x+1,\ b=x-3$ (또는 $a=x-3,\ b=x+1$)
따라서 두 다항식은 $(x-2)(x+1),\ \ (x-2)(x-3)$

22. $4x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(3\alpha - 2)(3\beta - 2)$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4},\ \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(3\alpha - 2)(3\beta - 2) &= 9\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 4 \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 4\end{aligned}$$

23. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x+4=0$
② $x^2+6x-4=0$
③ $x^2+4=0$
④ $x^2-6x+4=0$
⑤ $x^2-6x-4=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해서
두 근 α, β에 대해 $\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$
두 근을 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$로 하는
방정식에서

두 근의 합 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=(-3)+\frac{-3}{1}=-6$$

두 근의 곱 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4$$

$\therefore\ x^2-(-6)x+4=x^2+6x+4=0$

24. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$ 일 때,

최댓값 9를 갖는다.

25. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $20 - x$라고 하자.

$$\begin{aligned} y &= x \times (20 - x) \\ &= -x^2 + 20x \\ &= -(x^2 - 20x) \\ &= -(x - 10)^2 + 100 \end{aligned}$$

따라서 100 이 최댓값이다.

26. $3 < 11 - 4x \leq 15$일 때, x가 될 수 있는 정수를 모두 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 1

해설

$3 < 11 - 4x \leq 15$에서

$-8 < -4x \leq 4,$

$2 > x \geq -1$

따라서 만족하는 x는 $x = -1,\ 0,\ 1$

27. 다음 네 개의 부등식을 두 개씩 연립하였을 때의 해를 A, B, C 라고 할 때, 해가 <u>없는</u> 것을 모두 골라라.

$-\frac{3}{2}(x+1)>6$
$2(x+2)>-(x+5)$ — A
$2(x+5)\leq 4$ — B
$3(x+3)\geq 2x+11$ — C

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : A

▷ 정답 : B

▷ 정답 : C

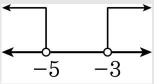
해설

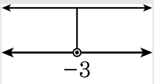
$$\begin{aligned}-\frac{3}{2}(x+1)&>6\\ -3x-3&>12\\ -3x&>15\\ x&<-5\end{aligned}$$

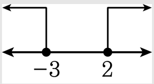
$$\begin{aligned}2(x+2)&>-(x+5)\\ 2x+4&>-x-5\\ 3x&>-9\\ x&>-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(x+5)&\leq 4\\ x+5&\leq 2\\ x&\leq -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3(x+3)&\geq 2x+11\\ 3x+9&\geq 2x+11\\ x&\geq 2\end{aligned}$$

A 

B 

C 

A 는 해가 없다.
B 는 해가 없다.
C 는 해가 없다.

28. 연립부등식 $3x-2 \le 5x+8 \le 4x+a$의 해가 $b \le x \le 9$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -6　② -4　③ 12　④ 14　⑤ 22

해설

$3x-2 \le 5x+8$, $3x-5x \le 8+2$, $-2x \le 10$

$\therefore\ x \ge -5$

$5x+8 \le 4x+a$, $5x-4x \le a-8$

$\therefore\ x \le a-8$

$-5 \le x \le a-8$

그런데 해가 $b \le x \le 9$이므로

$b=-5$, $a-8=9$

$\therefore\ a+b=17+(-5)=12$

29. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ \ -1<x<2$

30. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

a의 최솟값은 -1

31. 이차부등식 $ax^2 - bx + c < 0$의 해가 $x < -1$또는 $x > 3$일 때, 이차부등식 $ax^2 + cx + b > 0$의 해는?

① $-2 < x < 1$　② $-1 < x < 0$　③ $1 < x < 2$

④ $1 < x < 3$　⑤ $2 < x < 5$

해설

$x < -1$또는 $x > 3$인 해를 갖는 이차항계수가 1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3) > 0$이므로, $ax^2 - bx + x < 0$의 a가 음수이고, 이 부등식은 $a(x+1)(x-3) < 0$과 같다.

따라서 $b = 2a,\ c = -3a$이고 주어진 부등식

$ax^2 - 3ax + 2a = a(x^2 - 3x + 2)$

$= a(x-2)(x-1) > 0$이 된다.

$a < 0$이므로 만족하는 해는 $(x-1)(x-2) < 0$에서

$1 < x < 2$

32. 세 점 $A(6,1)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $(2,-1)$ ② $(2,-2)$ ③ $(3,-2)$
④ $(2,2)$ ⑤ $(1,-2)$

해설

외심의 좌표를 $O(a,b)$라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$
즉, $\overline{OA^2}=\overline{OB^2}$이므로
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$
$\therefore\ 7a-b=16\cdots$ ㉠
$\overline{OA}=\overline{OC}$
즉 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로
$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$
$\therefore\ 2a-b=6\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2, b=-2$
$\therefore O(2,-2)$

33. 좌표평면상의 점 $P(2, 3)$ 에 대하여, 점 P 를 지나고 $\overline{OP}$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $x - 2y = 5$ ② $2x + 3y = 13$ ③ $x + 3y = 10$

④ $2x + y = 13$ ⑤ $3x - 2y = 10$

해설

$\overline{OP}$ 의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

그리고 $(2,\ 3)$ 을 지나므로

$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}(x - 2) + 3$

$\Rightarrow \quad 2x + 3y = 13$

34. 세 직선 $3x+y=7$, $2x+y=k$, $kx-5y=5$이 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 만날 때 $a+b$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3x+y=7 \cdots$ ㉠

$2x+y=k \cdots$ ㉡

$kx-5y=5 \cdots$ ㉢

㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$이므로

㉢에 대입하면 $k^2+8k-65=0$

$\therefore k=5$ 또는 -13

$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$

$\therefore\ a+b$의 최댓값은 $2+1=3$

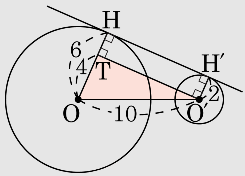
35. 다음 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-6)^2+(y-8)^2=4$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이의 합을 구하면?

① $2+\sqrt{19}$ ② $1+3\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{13}+\sqrt{31}$

④ $6+2\sqrt{21}$ ⑤ $5+4\sqrt{51}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 $6, 2$ 이고, 두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때, $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{O}'(6,8)$ 이므로 중심거리는 $\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이다. (i) 다음 그림과 같이 점 O' 에서 $\overline{\mathrm{OH}}$ 에 내린 수선의 발을 T라고 하면



$\overline{\mathrm{TH}}=\overline{\mathrm{O'H'}}=2$ 이므로

$\overline{\mathrm{OT}}=6-2=4$

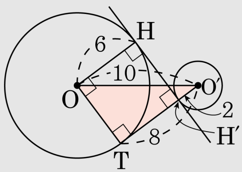
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{O'T}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OT}}^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$$

이 때, $\overline{\mathrm{HH}}=\overline{\mathrm{O'T}}$ 이므로 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{21}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=6+2=8$



한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$$

이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 6

(i), (ii) 에서 구하는 길이의 합은 $2\sqrt{21}+6$