1. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

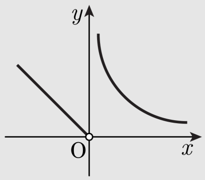
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0)\\ -x(x<0)\end{cases}$$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=\frac{10}{3}$
Ⅱ. $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$
Ⅲ. $x_1>x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)$

$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

ⅰ) $x>0$ 일 때, $-x<0, \frac{1}{x}>0$ 이므로

$f(-x)=-(-x)=x,$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

ⅱ) $x<0$ 일 때, $-x>0, \frac{1}{x}<0$ 이므로

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}$

ⅰ), ⅱ) 에서 $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\frac{1}{3}>-2$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{3}\right)=3>2=f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

2. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x-4)(x+2) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

3. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$, $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \le y \le 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

4. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f\ :\ A \to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

5. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3,\ (f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$ ($\because f(2) = 3$)

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

6. 분수함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$가 성립하는 함수 $g(x)$에서 $g(3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(g\circ f)(x)=x \Rightarrow \quad g(f(x))=x$

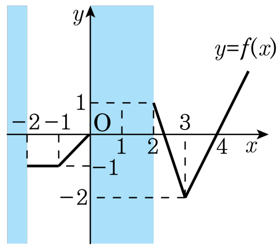
$\therefore \quad g(3)$을 구하려면

$f(x)=3$인 x를 찾으면 된다.

$3=\dfrac{2x-1}{x-1}$에서 $x=2$

$\therefore \quad g(3)=g(f(2))=2$

7. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



> $-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

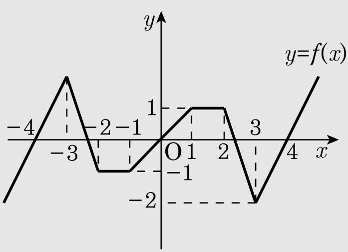
▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수

즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면

다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,

$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,

$0 \le x \le 2$일 때,

$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.

$\therefore M + N = 3$

8. 함수 f는 우함수, g는 기함수일 때, 다음 보기의 함수 중 우함수는 모두 몇 개인지 구하면?

보기

㉠ $(f \circ f)(x)$ ㉡ $(g \circ f)(x)$ ㉢ $(g \circ g)(x)$

㉣ $\{f(x)\}^2$ ㉤ $f(x)g(x)$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

함수 $f(x)$는 우함수이므로 $f(-x) = f(x)$
함수 $g(x)$는 기함수이므로 $g(-x) = -g(x)$

㉠ $(f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(f(x))$
$= (f \circ f)(x)$ $\therefore$ 우함수

㉡ $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x))$
$= (g \circ f)(x)$ $\therefore$ 우함수

㉢ $(g \circ g)(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x))$
$= -g(g(x)) = -(g \circ g)(x)$
$\therefore$ 기함수

㉣ $\{f(-x)\}^2 = \{f(x)\}^2$ $\therefore$ 우함수

㉤ $f(-x)g(-x) = f(x)\{-g(x)\}$
$= -f(x)g(x)$ $\therefore$ 기함수

따라서, 우함수는 3개이다.

9. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$ $\quad \therefore f(x) = bx$

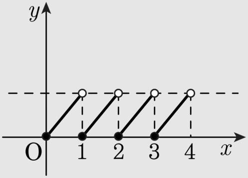
$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

10. $y = x - [x](0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

11. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = (2-x)+\{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = x+(2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x)+f(2-x)=2$

12. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(x) = x + 1$

ㄴ $f(x) = -x$

ㄷ $f(x) = -x + 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$

$= f((x+1)+1) = f(x+2)$

$= (x+2)+1 = x+3$

$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

ㄴ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$

$= f(-(-x)) = f(x)$

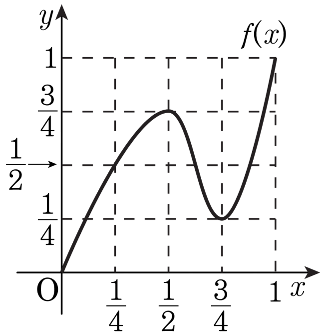
ㄷ. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$

$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

13. $R=\{x|0\le x\le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x)=(f\circ f\circ ...\circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

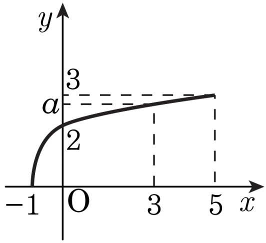
해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ f^2\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ f^3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \cdots$ 이므로

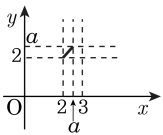
$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ \ f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\ f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$\therefore\ \ f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\ \cdots\ +f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)=33\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{99}{2}$

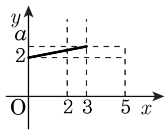
14. 실수 $-1 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는?



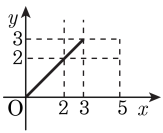
①



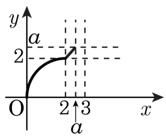
②



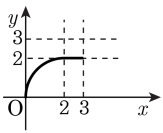
③



④



⑤



해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$이므로 $(f \circ f)\ (x)$ 함수는 $f(f(x))$에서 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는
$y = f(x)\ (0 \le x \le 3\ )$가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

15. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

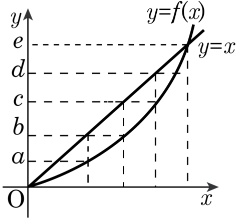
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1,\ f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

16. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b) = k$라고 하면, $f(k) = b$

$\therefore\ k = c \qquad \therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c) = t$라고 하면, $f(t) = c$

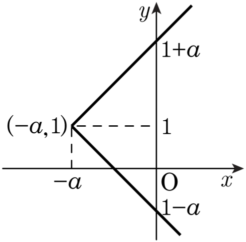
$\therefore\ t = d \qquad \therefore\ (f \circ f)^{-1}(b) = d$

17. $|y-1| = x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|y-1| = x+a$ 의
그래프는 $|y| = x$를
x 축 음의 방향으로 a,
y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.



이때, y 절편은 $|y-1| = a$ 에서 $y = 1 \pm a$

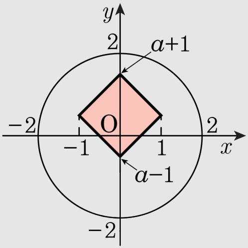
$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 4 \qquad \therefore\ a = 2(a > 0)$

18. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y - a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$ ⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y - a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$ 이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

19. 함수 $y=|x-2|+|x+1|$ 이 $x=m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=|x-2|+|x+1|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때,

$y=-(x-2)-(x+1)=-2x+1$

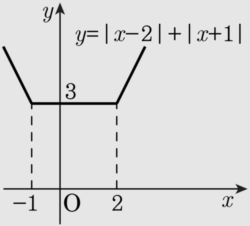
ii) $-1\le x<2$ 일 때,

$y=-(x-2)+(x+1)$

iii) $x\ge 2$ 일 때.

$y=(x-2)+(x+1)=2x-1=3$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 -1, 0, 1, 2 의 4 개다.



20. 함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, 유리수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

함수 $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 해는 $f(x) = x$ 의 해와 같으므로

$\frac{1}{6}x^2 + a = x$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, $x^2 - 6x + 6a = 0$ 에서 a 가 유리수이므로 두 근은 $3 + \sqrt{2}$
, $3 - \sqrt{2}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $6a = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore a = \frac{7}{6}$