

1. 두 점 A(6, -4), B(1, 1) 을 이은 선분 AB를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① (8, -10)

② (8, -8)

③ (8, -6)

④ (10, -8)

⑤ (10, -6)

해설

$$P\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2 + 3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3}\right) = (4, -2)$$

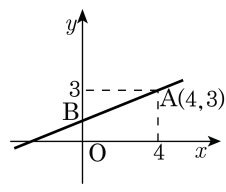
$$Q\left(\frac{2 \times 1 - 3 \times 6}{2 - 3}, \frac{2 \times 1 - 3 \times (-4)}{2 - 3}\right) = (16, -14)$$

따라서 선분 PQ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4 + 16}{2}, \frac{-2 + (-14)}{2}\right)$$

$$\therefore (10, -8)$$

2. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 A(4, 3) 을 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 B(0, k) 라 할 때, 상수 k 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 1$

해설

두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$(\text{기울기}) = \frac{3-k}{4-0} = \frac{1}{2}$$

따라서 $k = 1$

3. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $C(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a + b + r$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore C(1, -2), r = 2 \quad \therefore a + b + r = 1$$

4. 세 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots\dots \textcircled{\text{A}}$ 이라 하면
 $\textcircled{\text{A}}$ 는 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나므로
 $1 + 1 + A + B + C = 0, 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$
 $9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$
 $\therefore A = -5, B = -1, C = 4$
 $\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
 $\therefore A \times B \times C = 20$

5. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시켜 얻어진 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

③ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

④ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

해설

x 축에 대하여 대칭이동시켰으므로
주어진 방정식에 y 대신 $-y$ 를 대입하면
 $(x+2)^2 + (-y-1)^2 = 4$
 $\therefore (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$

6. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

7. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

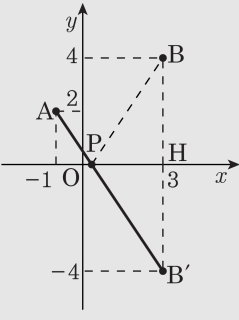
8. 두 점 A (−1, 2) , B (3, 4)에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B' (3, −4)
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$
 따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소거리는 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소 거리와 같고
 세 점 A, P, B'이 직선 위에 있을 때
 가장 짧은 $\overline{AB'}$ 이 최소거리이다.

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}$$

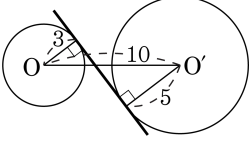


9. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?
- ① $-2 < m < 2$ ② $-2 < m < 3$ ③ $-1 < m < 2$
④ $1 < m < 4$ ⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \dots ①$ 에서
 $m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로
위의 직선은 m 의 값에 관계없이
점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고
 $(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로
따라서 $1 < m < 4$

10. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

11. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a ,
 y 축으로 b 만큼 평행이동하면
 $(1 + a, -2 + b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1 - a, 2 - b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a = -2, b = 0$
 $\therefore a + b = -2$

12. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 x 축에 대하여

대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$$

이 때, 이 원의 중심이 $(-1, -3)$ 이고

반지름의 길이가 2 이므로

$$x^2 + y^2 + ax - by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

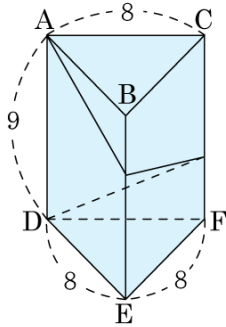
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$$

$$\therefore a = 2, b = -6, c = 6$$

따라서, 구하는 a, b, c 의 값의 합은

$$2 + (-6) + 6 = 2$$

13. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

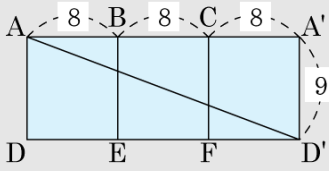


▶ 답 :

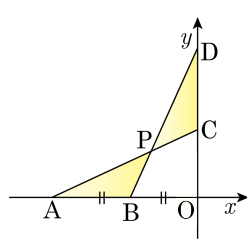
▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



14. 다음 그림에서 점 B가 선분 AO의 중점이고, 사각형 PBOC의 넓이는 어두운 두 삼각형 PAB, PCD의 넓이의 합과 같다. 직선 BD의 기울기가 3일 때, 직선 AC의 기울기는?



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$
 ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\triangle ABP = \triangle BOP$ 이므로 $\triangle COP = \triangle CDP$
 따라서, $\overline{CO} = \overline{CD}$, $\overline{BO} = k$ 라 하면
 직선 BD의 기울기가 3 이므로

$$\overline{OD} = 3k \text{ 이고 } \overline{CO} = \frac{3}{2}k$$

$$\text{직선 AC의 기울기는 } \frac{\frac{3}{2}k}{2k} = \frac{3}{4}$$

15. 두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1, 2), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \frac{4 - 2}{3 - (-1)}(x - 3)$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, x = -5$$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $A(-5, 0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $B(0, \frac{5}{2})$,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

16. A (1, 1), B (-2, -3), C ($k, k + 1$)이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \therefore k = 4$$

17. 두 직선 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 과 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 이 서로 수직이 되려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

② $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

③ $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$

④ $a_1a_2 + b_1b_2 = -1$

⑤ $a_1b_1 + a_2b_2 = -1$

해설

(i) $b_1b_2 \neq 0$ 일 때,

두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a_1}{b_1}$, $-\frac{a_2}{b_2}$ 이다.

두 직선이 수직이 되기 위해서는 기울기의 곱이 -1 이 되어야 하므로

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \times \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1 \text{ 이고,}$$

$$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

(ii) $b_1b_2 = 0$ 일 때,

$$b_1 = 0 \text{ 이면 } a_1x + c_1 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{c_1}{a_1}$$

이 때, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 은

y 축에 수직인 직선 이 되어야 하므로

$a_2 = 0$ 같은 방법으로 $b_2 = 0$ 이면 $a_1 = 0$ 이어야한다.

$$\text{즉, } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

해설

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ 이면, $a_1a_2 = -b_1b_2$ 이므로

$$-\frac{a_1}{b_1} \times -\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ 이다.}$$

$$-\frac{a_1}{b_1}, -\frac{a_2}{b_2} \text{ 는 두 직선의 기울기이고}$$

곱이 -1 이므로 두직선은 수직이다.

따라서 두 직선이 서로 수직이려면

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \text{ 이다.}$$

18. 세 직선 $x + 2y - 3 = 0$, $3x + y - 4 - a = 0$, $2x - 3y - 2a = 0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a = -\frac{3}{5}$

② $a = -\frac{1}{3}$

③ $a = -\frac{5}{3}$

④ $a = \frac{5}{3}$

⑤ $a = 5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$$x + 2y - 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + y - 4 - a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$2x - 3y - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \text{라하고,}$$

$$\textcircled{2} \times 3 + \textcircled{3} \Leftrightarrow \therefore 11x - 12 - 5a = 0$$

$$\therefore x = \frac{5a + 12}{11}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{3} \times 3 \Leftrightarrow \therefore 11y - 8 + 4a = 0$$

$$\therefore y = \frac{-4a + 8}{11}$$

$$\therefore \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{의 교점의 좌표는 } \left(\frac{5a + 12}{11}, \frac{-4a + 8}{11} \right)$$

이 점이 $\textcircled{1}$ 위에 있어야 하므로

$$\frac{5a + 12}{11} + 2 \frac{-4a + 8}{11} - 3 = 0$$

$$\text{즉, } \frac{5a + 12 - 8a + 16}{11} - 3 = 0$$

$$-3a + 28 = 33, 3a = -5 \quad \therefore a = -\frac{5}{3}$$

19. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$ 은 k 의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

㉠ (1, 1)

㉡ (1, 0)

㉢ (3, 1)

㉣ (-1, -3)

㉤ (3, 0)

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k 에 대하여

정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$

이 식이 k 에 값에 관계없이 성립하려면

$3x+y-4=0$, $5x-2y-3=0$

이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1$, $y=1$

즉, k 의 값에 관계없이 점(1, 1)을 지난다.

20. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다.

a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 최소값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h 는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

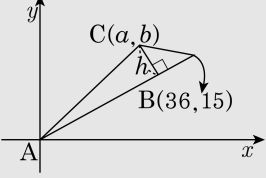
$$\triangle ABC \text{의 넓이 } S \text{는 } S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2} |5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$ 일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$ 일 때이다.



21. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

22. x, y 에 대한 이차방정식 $2x^2 + py^2 + qxy - 6x + 8y + 2r = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p > 1, q = 0, r < 6$

② $p = \frac{7}{9}, q < 0, r < \frac{2}{3}$

③ $p < 9, q = 0, r < \frac{19}{5}$

④ $p = 2, q = 0, r < \frac{25}{4}$

⑤ $p > 1, q < \frac{8}{11}, r < \frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
 x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로

$$p = 2, q = 0$$

따라서, 주어진 방정식은

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 2r = 0$$

이 때, 양변을 2 로 나누면

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + r = 0$$

이 식을 변형하면

$$\left\{ x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\} + (y^2 + 4y + 4)$$

$$= -r + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 4$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + (y + 2)^2 = -r + \frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r + \frac{25}{4} > 0$$

$$\therefore r < \frac{25}{4}$$

23. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ 의 공통현의 길이는?

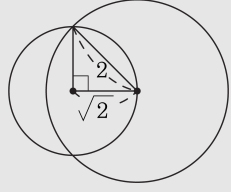
- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 = 4, (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$$\therefore \text{현의 길이} : 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

24. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

25. 점 (1, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 접선 중 x 축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

- ① $-\frac{5}{3}$
- ② $-\frac{3}{2}$
- ③ $-\frac{4}{3}$
- ④ -1
- ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 (1, 2)를 지나고 기울기가 m 인 접선의 식을 $y - 2 = m(x - 1)$ 이라 놓으면 원의 중심 (0, 0)과 $y - 2 = m(x - 1)$ 즉, $mx - y - m + 2 = 0$ 까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$$2 = \frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}, | -m + 2 | = 2 \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 4m + 4 = 4m^2 + 4, 3m^2 + 4m = 0$$

따라서 기울기 $m = 0, -\frac{4}{3}$ 이다.

x 축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.