1. 두 점 $A(6,\ -4)$, $B(1,\ 1)$ 을 이은 선분 AB를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① $(8,\ -10)$ ② $(8,\ -8)$ ③ $(8,\ -6)$

④ $(10,\ -8)$ ⑤ $(10,\ -6)$

해설

$$P\left(\frac{2\times1+3\times6}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)=(4,\ -2)$$

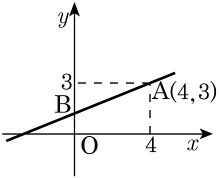
$$Q\left(\frac{2\times1-3\times6}{2-3},\ \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)=(16,\ -14)$$

따라서 선분 PQ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+16}{2},\ \frac{-2+(-14)}{2}\right)$$

$\therefore\ (10,\ -8)$

2. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 $\mathrm{A}(4,\ 3)$ 을 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 $\mathrm{B}(0,\ k)$ 라 할 때, 상수 k 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 1$

해설

두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

(기울기)$= \dfrac{3-k}{4-0} = \dfrac{1}{2}$

따라서 $k = 1$

3. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a+b+r$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=-1+1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ 이므로

$\therefore \mathrm{C}(1,\ -2),\ r=2 \quad \therefore a+b+r=1$

4. 세 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0\cdots\cdots$ ㉡이라 하면

㉡는 점 $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0,\ 4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,

$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$

$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$

$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

5. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시켜 얻어진 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
④ $(x+2)^2+(y+1)^2=4$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

해설

x 축에 대하여 대칭이동시켰으므로
주어진 방정식에 y 대신 $-y$ 를 대입하면
$(x+2)^2+(-y-1)^2=4$
$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=4$

6. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는 5이고 점 $C(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $D(a-b)$의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$일때, $A(a)$, $B(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $D(a-b)$의 좌표는 5

7. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

8. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 $B'(3,\ -4)$

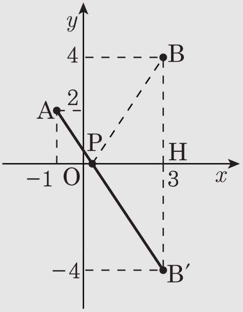
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최소거리는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최소 거리와 같고

세 점 A, P, B′이 직선 위에 있을 때

가장 짧은 $\overline{AB'}$이 최소거리이다.

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



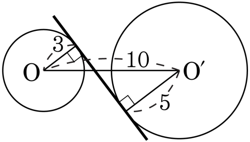
9. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$　② $-2<m<3$　③ $-1<m<2$
④ $1<m<4$　⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$ ①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

10. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ **답:**

▷ **정답:** 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

11. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

12. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이가 2 일 때, 상수 a,b,c 의 값의 합을 구하여라.

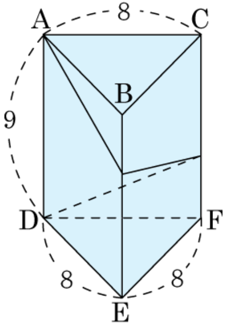
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
이 때, 이 원의 중심이 $(-1,-3)$ 이고
반지름의 길이가 2 이므로
$x^2+y^2+ax-by+c=0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+6y+6=0$
$\therefore a=2,\ b=-6,\ c=6$
따라서, 구하는 $a,\ b,\ c$ 의 값의 합은
$2+(-6)+6=2$

13. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

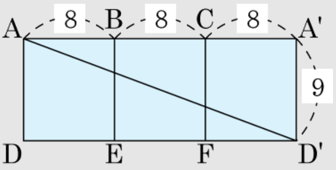


▶ 답 :

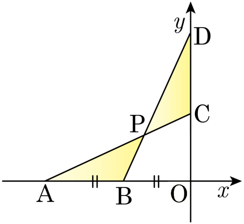
▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



14. 다음 그림에서 점 B 가 선분 AO 의 중점이고, 사각형 PBOC 의 넓이는 어두운 두 삼각형 PAB, PCD 의 넓이의 합과 같다. 직선 BD 의 기울기가 3 일 때, 직선 AC 의 기울기는?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\triangle ABP = \triangle BOP$ 이므로 $\triangle COP = \triangle CDP$

따라서, $\overline{CO} = \overline{CD}$, $\overline{BO} = k$ 라 하면

직선 BD 의기울기가 3 이므로

$\overline{OD} = 3k$ 이고 $\overline{CO} = \frac{3}{2}k$

직선 AC 의 기울기는 $\dfrac{\frac{3}{2}k}{2k} = \dfrac{3}{4}$

15. 두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A, B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{25}{4}$　④ $\frac{24}{5}$　⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-4=\frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$y=0$ 을 대입하면

$0=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, x=-5$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}(-5,0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\frac{5}{2})$,

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

16. A $(1,1)$, B $(-2,-3)$, C $(k, k+1)$ 이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$ 와 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$\Rightarrow \quad \therefore\ k = 4$

17. 두 직선 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$과 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$이 서로 수직이 되려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
② $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$
③ $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$
④ $a_1a_2 + b_1b_2 = -1$
⑤ $a_1b_1 + a_2b_2 = -1$

해설

(i) $b_1b_2 \neq 0$일 때,

두 직선의 기울기는 각각 $-\dfrac{a_1}{b_1}$, $-\dfrac{a_2}{b_2}$이다.

두 직선이 수직이 되기 위해서는 기울기의 곱이 -1이 되어야 하므로

$\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right) \times \left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1$이고,

$\therefore\ a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(ii) $b_1b_2 = 0$일 때,

$b_1 = 0$이면 $a_1x + c_1 = 0$

$\therefore\ x = -\dfrac{c_1}{a_1}$

이 때, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$은
y축에 수직인 직선 이 되어야 하므로
$a_2 = 0$ 같은 방법으로 $b_2 = 0$이면 $a_1 = 0$이어야한다.
즉, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

해설

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$이면, $a_1a_2 = -b_1b_2$이므로

$-\dfrac{a_1}{b_1} \times -\dfrac{a_2}{b_2} = -1$이다.

$-\dfrac{a_1}{b_1}$, $-\dfrac{a_2}{b_2}$는 두 직선의 기울기이고

곱이 -1이므로 두직선은 수직이다.
따라서 두 직선이 서로 수직이려면
$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$이다.

18. 세 직선 $x+2y-3=0$, $3x+y-4-a=0$, $2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$ ② $a=-\frac{1}{3}$ ③ $a=-\frac{5}{3}$
④ $a=\frac{5}{3}$ ⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0$ $\cdots$ ㉠

$3x+y-4-a=0$ $\cdots$ ㉡

$2x-3y-2a=0$ $\cdots$ ㉢라하고,

㉡ $\times 3+$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$$\therefore\ x=\frac{5a+12}{11}$$

㉡ $\times 2-$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$$\therefore\ y=\frac{-4a+8}{11}$$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5a+12}{11},\ \frac{-4a+8}{11}\right)$

이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$$\frac{5a+12}{11}+2\frac{-4a+8}{11}-3=0$$

즉, $\frac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

19. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(3,\ 1)$

④ $(-1,\ -3)$ ⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.

20. 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(36,\ 15)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$인 삼각형 ABC가 있다. a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{\mathrm{AB}}$의 방정식은 $5x-12y=0$

△ABC의 높이 h는

$$h=\frac{|5a-12b|}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

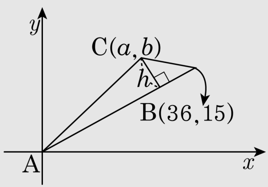
△ABC의 넓이 S는 $\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{h}$

$$=\frac{1}{2}3\sqrt{12^2+5^2}\cdot\frac{|5a-12b|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{3}{2}|5a-12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a-12b|=1$일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a,b)=(5,2)$ 또는 $(7,3)$일 때이다.



21. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$
② $x-2y+5=0$
③ $3x-4y=0$
④ $x+2y+5=0$
⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$$X=\frac{1+a}{2},\ Y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

22. x, y에 대한 이차방정식 $2x^2+py^2+qxy-6x+8y+2r=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p>1,\ q=0,\ r<6$

② $p=\frac{7}{9},\ q<0,\ r<\frac{2}{3}$

③ $p<9,\ q=0,\ r<\frac{19}{5}$

④ $p=2,\ q=0,\ r<\frac{25}{4}$

⑤ $p>1,\ q<\frac{8}{11},\ r<\frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면

x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로

$p=2,\ q=0$

따라서, 주어진 방정식은

$2x^2+2y^2-6x+8y+2r=0$

이 때, 양변을 2 로 나누면

$x^2+y^2-3x+4y+r=0$

이 식을 변형하면

$$\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\left(y^2+4y+4\right)$$

$$=-r+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=-r+\frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r+\frac{25}{4}>0$$

$$\therefore r<\frac{25}{4}$$

23. 두 원 $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

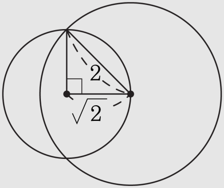
① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4,\ (x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\dfrac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

24. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

25. 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선 중 x축과 평행이 아닌 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 식을 $y-2=m(x-1)$이라 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 $y-2=m(x-1)$ 즉, $mx-y-m+2=0$까지의 거리는 원의 반지름 2와 같으므로

$$2=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}},\ |-m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-4m+4=4m^2+4,\ 3m^2+4m=0$$

따라서 기울기 $m=0,\ -\frac{4}{3}$이다.

x축과 평행하지 않으므로 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.