1. 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,
$a=b^2+1 \cdots\cdots$ ㉠
$l=\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡
㉠를 ㉡에 대입하면
$$l=\frac{|b^2-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$
$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.
따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$이므로
$\therefore\ 4(a+b)=7$

2. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$　② $y=-\frac{2}{3}x$　③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=-\frac{4}{3}x$　⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y=kx(k\neq 0)$이라 하면,

$(2,\ 1)$에서의 거리가 1이므로

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ |2k-1|=\sqrt{k^2+1},\ k(3k-4)=0$$

$$k=\frac{4}{3}\ (\because k\neq 0)$$

$$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$$

3. $f(t)=\dfrac{t}{1-t}$ (단, $t \neq 1$) 인 함수 f 가 있다. $y=f(x)$ 일 때, $x=\square$ 로 나타낼 수 있다. □ 안에 알맞은 것은?

① $-f(y)$ ② $-f(-y)$ ③ $f(-y)$

④ $f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ ⑤ $f(y)$

해설

$y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 에서

$y-xy=x,\ x(1+y)=y$

$\therefore\ x=\dfrac{y}{1+y}=\dfrac{-y}{1-(-y)}=-f(-y)$

4. O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 2)$, B$(3,\ 2)$일 때, 평행사변형 OABC의 넓이를 구하면?

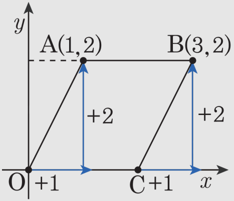
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{OA} // \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$이

점 A는 점 O를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 B도 점 C를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



$\therefore$ C $= (2,\ 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$

5. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\mathrm{P}(-1, -1)$ ③ $\mathrm{P}(0, 0)$

④ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{P}(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

6. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3} \quad \therefore\ b+c=2$

7. 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x+by+1=0$에 수직이고 직선 $x-(b-1)y-1=0$과 평행할 때, a^2+b^2의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x+by+1=0$이 서로 수직이므로

$1\cdot 2+a\cdot b=0 \quad \therefore\ ab=-2\cdots㉠$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-1)y-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{1-b}\neq\frac{1}{-1} \quad \therefore\ a+b=1\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\therefore\ 1-2\cdot(-2)=5$

8. 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $Q(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$　② $y=2$　③ $x+y=2$

④ $x-y=-4$　⑤ $x+y=0$

해설

$P(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2 \cdots$ ㉠

$Q(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,

$a-b=x$, $a+b=y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{y-x}{2}$

㉠에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$\therefore y-x=-(x+y)+4$

$\therefore y=2$

9. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x<1) \end{cases}$ 에서 $y=(f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

ⅰ) $x \geq 1$: $y=(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$
ⅱ) $x<1$: $y=(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$
$\therefore\ y=(f \circ f)(x)=2$

10. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$는?

① $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)$

② $h(x)=3x-1$

③ $h(x)=x-3$

④ $h(x)=3-x$

⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$에서

$f(x)=t$라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\frac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\frac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

11. $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x-2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$　　② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$　　④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x+1$, $g(x) = 3x-2$ 일 때,

$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$

$3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$

$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

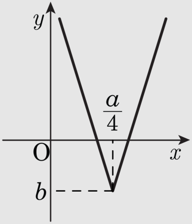
12. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

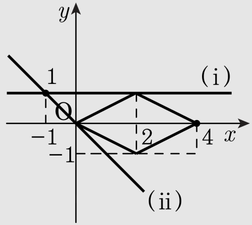
$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \qquad \therefore\ a + b = 10$

13. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

14. 함수 f는 우함수, g는 기함수일 때, 다음 보기의 함수 중 우함수는 모두 몇 개인지 구하면?

보기

㉠ $(f \circ f)(x)$　　㉡ $(g \circ f)(x)$　　㉢ $(g \circ g)(x)$

㉣ $\{f(x)\}^2$　　㉤ $f(x)g(x)$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

함수 $f(x)$는 우함수이므로 $f(-x) = f(x)$

함수 $g(x)$는 기함수이므로 $g(-x) = -g(x)$

㉠ $(f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(f(x))$

$= (f \circ f)(x)$　$\therefore$ 우함수

㉡ $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x))$

$= (g \circ f)(x)$　$\therefore$ 우함수

㉢ $(g \circ g)(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x))$

$= -g(g(x)) = -(g \circ g)(x)$

$\therefore$ 기함수

㉣ $\{f(-x)\}^2 = \{f(x)\}^2$　$\therefore$ 우함수

㉤ $f(-x)g(-x) = f(x)\{-g(x)\}$

$= -f(x)g(x)$　$\therefore$ 기함수

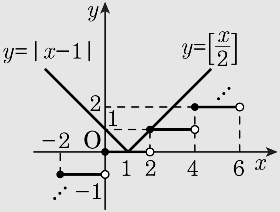
따라서, 우함수는 3개이다.

15. 두 함수 $y = |x-1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

16. 등식 $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ 이 x에 대한 항등식이 될 때, $A-B$의 값을 구하면? (단, A, B는 상수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 식의 우변을 정리하면

$$\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

따라서 $\dfrac{(A+B)x+A}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$ 이므로

$A+B=0,\ A=1$

$\therefore\ B=-1$

$\therefore\ A-B=1-(-1)=2$

17. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 일 때, $f(1)g(1)+f(2)g(2)+f(3)g(3)+\cdots+f(49)g(49)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{51}{49}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{51}{50}$

해설

$$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{(x+1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ 이므로

(주어진 식) $=$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)=1-\frac{1}{50}=$

$\frac{49}{50}$

18. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m의 값에 대하여 $k+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}$$

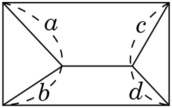
$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6,\ m=12$

$\therefore k+m=18$

19. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{d}$　　② $a + c = b + d$

③ $a + b = c + d$　　④ $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.

이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$라고 하면

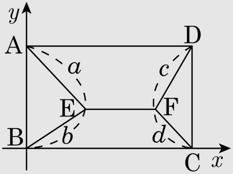
$a^2 = x^2 + (y-q)^2$

$b^2 = x^2 + y^2$

$c^2 = (z-p)^2 + (y-q)^2$

$d^2 = (z-p)^2 + y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2 + d^2 = b^2 + c^2$



20. 좌표평면에서 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(6,\ 0)$에 대하여 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① $(2, -1)$ ② $(2, -2)$ ③ $(2, -3)$

④ $(-2, 3)$ ⑤ $(-2, -3)$

해설

$\overline{AB}$의 기울기 : $\dfrac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow$ 수직이등분선

$: y = -3\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2}$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\dfrac{2-1}{6-2} = \dfrac{1}{4}$, 중심은 $(4,\ 1) \Rightarrow$ 수직이등분

선: $y = 2(x-4)+1$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2,\ y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$\therefore\ (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

$O(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AO} = \overline{CO}$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2 = (x-6)^2+y^2$, $7x-y = 17 \cdots$ ㉠

$\overline{BO} = \overline{CO}$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2 = (x-6)^2+y^2$, $2x-y = 7 \cdots$ ㉡

㉠ ㉡에서 교점의 좌표는 $(2,\ -3)$

21. 두 점 $A(2,\ -2)$, $B(1,\ 3)$에 대하여 선분 AB 를 $(1+t)\ :\ t$로 외분하는 점이 제2사분면에 속할 때, t의 값의 범위를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $t > 1$

해설

선분 AB 를 $(1+t)\ :\ t$ 로 외분하는 점을 Q 라 하면

$$Q\left(\frac{(1+t)\cdot 1 - t\cdot 2}{(1+t)-t},\ \frac{(1+t)\cdot 3 - t\cdot(-2)}{(1+t)-t}\right)$$

즉, $Q(1-t,\ 3+5t)$ 이때, 점 Q 가 제2사분면에 속하므로

$1-t < 0,\ 3+5t > 0$

따라서 $t > 1$

22. 네 점 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(2,\ 3)$, $D(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

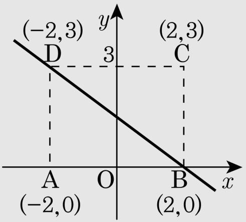
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx+y-2m=0$

즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $B(2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 $D(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, $D(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

23. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(-4,\ 6)$ ② $\mathrm{P}(-4,\ -6)$ ③ $\mathrm{P}(2,\ 3)$
④ $\mathrm{P}(3,\ 2)$ ⑤ $\mathrm{P}(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore \mathrm{P}(-4, -6)$

24. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수) 로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

> ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
>
> ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
>
> ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
$\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

25. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$

$X \cup Y = \varnothing$ 이다.

$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$n(X) = n(Y)$

$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ \ X \cup Y = \varnothing$ 이므로

$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.

$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며

X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

26. 함수 $f(x) = -x+3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\cdots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \cdots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+3) = x$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

이므로

$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3$ 이므로

$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \ \cdots$

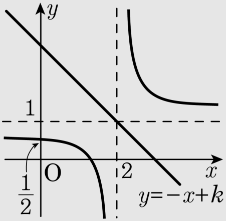
$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3$ 이다.

3 이 1002 개이므로 $3 \times 1002 = 3006$

27. 분수함수 $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설



$$y = \frac{x-1}{x-2}$$
$$= \frac{(x-2)+1}{x-2}$$
$$= \frac{1}{x-2} + 1$$

따라서, 점근선이
$x = 2$, $y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음과 같다.
다음 그래프가 직선 $y = -x + k$에 대하여 대칭이려면
직선이 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로
$1 = -2 + k$
$\therefore\ k = 3$

28. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 일대일대응인 두 함수 $f,\ g$ 에 대하여 $f^{-1}(x) = x^2,\ \ (f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 일 때, $(f \circ g)(20)$ 의 값은? (단, f^{-1} , g^{-1} 는 각각 $f,\ g$ 의 역함수)

① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ 40 ④ 200 ⑤ 400

해설

$f^{-1}(x) = x^2$ 에서 $f(x^2) = x \cdots$ ㉠

$(f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 에서 $f(g^{-1}(x^2)) = x \cdots$ ㉡

f는 일대일 대응이므로 ㉠, ㉡ 에서

$g^{-1}(x^2) = x^2$

$\therefore g(x^2) = x^2$

따라서 $g(20) = 20,\ f(20) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$(f \circ g)(20) = f(g(20)) = f(20) = 2\sqrt{5}$

29. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$이라 하고, $P_n = \dfrac{T_2}{T_2 - 1} \times \dfrac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \dfrac{T_n}{T_n - 1}$ $(n \geq 2)$라고 할 때, P_{1991}에 가장 근사한 값은?

① 2.0 ② 2.3 ③ 2.6 ④ 2.9 ⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

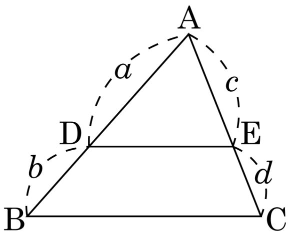
$$\frac{T_n}{T_n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$$

30. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD}=a$, $\overline{DB}=b$, $\overline{AE}=c$, $\overline{EC}=d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 않은 것은? (단, $a \neq b$)



① $ad=bc$

② $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$

③ $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

④ $\dfrac{c+d}{a+b}=\dfrac{d}{a}$

⑤ $\dfrac{c+d}{a+b}=\dfrac{c-d}{a-b}$

해설

$\overline{DE} // \overline{BC}$이므로

$a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \cdots$ ㉠

① $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$이므로 $ad=bc$

② $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$

$\therefore \dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

③ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$이므로 $\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{d}-1$

$\therefore \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d} \cdots$ ㉢

④ ㉠ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b}=\dfrac{c}{a}$

⑤ ㉢ ÷ ㉡에서 $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$

$\therefore \dfrac{c+d}{a+b}=\dfrac{c-d}{a-b}$