1. 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=2x+1$에 대하여 $(f\circ g\circ f)(1)$의 값은?

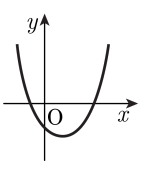
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

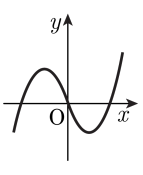
해설

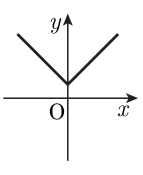
$f(1)=0$이므로 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=1$

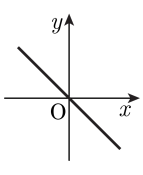
$\therefore\ (f\circ g\circ f)(1)=f(1)=0$

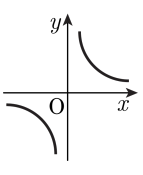
2. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤ 번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

3. 분수식 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$을 간단히 하면 $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\\
&=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)\\
&=\frac{-2}{(x-1)(x-3)}+\frac{-2}{(x-2)(x-4)}\\
&=\frac{-2(x^2-6x+8+x^2-4x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}\\
&=\frac{-2(2x^2-10x+11)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}\\
&=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}\\
&\therefore\ a=-4,\ b=20,\ c=-22\\
&\therefore\ a+b+c=-6
\end{aligned}$$

4. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-12}\times\dfrac{4x^2+16x}{x+1}\div\dfrac{2x-4}{x-3}$을 간단히 하면?

① x ② $2x$ ③ $x-2$

④ $2x-6$ ⑤ $x+4$

해설

식을 인수분해 한 후 약분하여 정리한다.

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}\times\frac{4x^2+16x}{x+1}\div\frac{2x-4}{x-3}$$

$$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-3)}\times\frac{4x(x+4)}{(x+1)}\times\frac{(x-3)}{2(x-2)}=2x$$

5. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$
$=2ax+4\ \cdots$㉠
$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$
$=2ax+6a-1\ \cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$ ∴ 옳다.

7. $f(x)=2x-3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g\circ f)^{-1}(x)=2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g\circ f)^{-1}(x)=2x \Leftrightarrow (g\circ f)(2x)=x$

$\Leftrightarrow g(f(2x))=x$

$f(2x)=2\bullet 2x-3=4x-3$

$\therefore g(f(2x))=g(4x-3)=x$

$4x-3=1$ 에서 $x=1$ 이므로

$g(4x-3)=x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1$

8. $f(x)=\begin{cases}4x^2+1 & (x\geq 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=3x-7$ 일때, $(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g^{-1}\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ(g^{-1})^{-1}=f^{-1}\circ g$ 이고
$g(x)=3x-7$ 에서 $g(3)=3\times 3-7=2$ 이다.
$(g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))$
$=f^{-1}(2)$
$(f^{-1})(2)=a$ 라 하면 $f(a)=2$
그런데 $a<0$ 일 때, $2a+1<1$ 이므로
이 범위에서 $f(a)=2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a\geq 0$ 이고 $f(a)=4a^2+1=2$ 에서
$4a^2=1$
$\therefore a=\frac{1}{2}(\because a\geq 0)$
$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(3)=\frac{1}{2}$

9. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$이므로 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

10. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$ 을 간단히 하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{\sqrt{2}-1}} = 1-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\sqrt{2}$$

$\therefore (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1$

11. $2x = 3y = 4z$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2 - z^2}{xy - yz - zx}$ 의 값은?

① 6 ② $-\dfrac{6}{11}$ ③ $\dfrac{6}{11}$ ④ $-\dfrac{11}{6}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

해설

$2x = 3y = 4z = k(k \neq 0) \Rightarrow x = \dfrac{k}{2},\ y = \dfrac{k}{3},\ z = \dfrac{k}{4}$

$$\frac{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16}}{\frac{k^2}{6} - \frac{k^2}{12} - \frac{k^2}{8}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8}} = -\frac{11}{6}$$

12. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x$에서
$a^2 = 1 \quad \therefore \ a = \pm 1$

13. 분수함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$가 성립하는 함수 $g(x)$에서 $g(3)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(g\circ f)(x)=x \Rightarrow \quad g(f(x))=x$

$\therefore$ $g(3)$을 구하려면

$f(x)=3$인 x를 찾으면 된다.

$3=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 에서 $x=2$

$\therefore$ $g(3)=g(f(2))=2$

14. $x=1$ 일 때,

$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{3}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{4}{(x+6)(x+10)}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{8}{11}$ ② $\dfrac{10}{11}$ ③ $\dfrac{12}{11}$ ④ $\dfrac{8}{9}$ ⑤ $\dfrac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$+\frac{3}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{4}{4}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}$$

$x=1$ 대입하면 $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{1+10}=1-\dfrac{1}{11}=\dfrac{10}{11}$

15. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$일 때, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 값은? (단, $x>0$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=3\ (\because x>0)$

$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=5$

$\therefore \sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$

16. 0이 아닌 실수 x, y, z에 대하여 등식 $2x-6y+4z=0$, $3x+y-2z=0$이 성립한다. 이때, $\dfrac{x^2+y^2}{xy+y^2}$의 값은?

① $\dfrac{2}{7}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x=y$가 나온다.

$$\frac{x^2+y^2}{xy+y^2}=\frac{x^2+4x^2}{2x^2+4x^2}=\frac{5x^2}{6x^2}=\frac{5}{6}$$

17. 분수식 $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}$　② $\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}$

③ $\dfrac{x^2+2}{x(x+1)}$　④ $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}$

⑤ $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x+1)}$

해설

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2+x}\\
&=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{x^2+x}\\
&=\frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{x^2+x}\\
&=\frac{(2x^2+2)x-(x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)}\\
&=\frac{(x^2+1)(2x-x+1)}{x(x+1)(x-1)}\\
&=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}\\
&=\frac{x^2+1}{x(x-1)}
\end{aligned}$$

18. 한 학생이 1년 동안 구입한 참고서와 교양서적을 비교하였더니, 1학기에는 1 : 3의 비율로 구입하고 2학기에는 5 : 3의 비율로 구입하여 1년 동안 구입한 비율이 3 : 5이었다. 다음 중 1년 동안 구입한 서적의 수로 볼 수 있는 것은?

① 32권 ② 40권 ③ 48권 ④ 54권 ⑤ 64권

해설

	참고서	교양서적
1학기	$\frac{a}{4}$	$\frac{3}{4}a$
2학기	$\frac{5}{8}b$	$\frac{3}{8}b$

1년 동안 구입한 서적 수의 비는

$\left(\frac{a}{4}+\frac{5}{8}b\right) : \left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{8}b\right) = 3 : 5$

$\frac{10a+25b}{8} = \frac{18a+9b}{8}$, $8a = 16b$

$\therefore a = 2b$

1년 동안 구입한 서적의 수는

$a+b = 3b$이고 b가 8의 배수이므로

$a+b$는 24의 배수이다.

따라서 서적의 수로 볼 수 있는 것은 48권이다.