

1. 두 함수 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

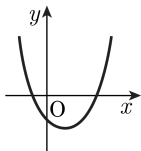
해설

$$f(1) = 0 \text{ 이므로 } (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$$

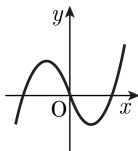
$$\therefore (f \circ g \circ f)(1) = f(1) = 0$$

2. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

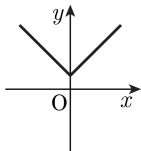
①



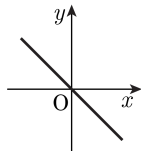
②



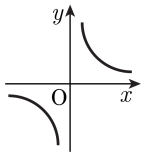
③



④



⑤



해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.

일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.

⑤ 변은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

3. 분수식 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$ 을 간단히 하면 $\frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ 일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \\
 &= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} \right) \\
 &= \frac{-2}{(x-1)(x-3)} + \frac{-2}{(x-2)(x-4)} \\
 &= \frac{-2(x^2 - 6x + 8 + x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \\
 &= \frac{-2(2x^2 - 10x + 11)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \\
 &= \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \\
 \therefore a &= -4, b = 20, c = -22 \\
 \therefore a + b + c &= -6
 \end{aligned}$$

4. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \times \frac{4x^2 + 16x}{x + 1} \div \frac{2x - 4}{x - 3}$ 을 간단히 하면?

① x

② $2x$

③ $x - 2$

④ $2x - 6$

⑤ $x + 4$

해설

식을 인수분해 한 후 약분하여 정리한다.

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \times \frac{4x^2 + 16x}{x + 1} \div \frac{2x - 4}{x - 3} \\ &= \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x + 4)(x - 3)} \times \frac{4x(x + 4)}{(x + 1)} \times \frac{(x - 3)}{2(x - 2)} = 2x \end{aligned}$$

5. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
 ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
 ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
 ㉤ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

$\therefore$ 옳지 않다.

㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.

$\therefore$ 옳다.

$$\begin{aligned} \text{㉢ } (f \circ g \circ h)^{-1} &= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1} \\ &= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ 옳지 않다.

㉤ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로

$$f \circ g = I \text{ 에서 } f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$$

$\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

7. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$$

$$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$$

$$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$$

$$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$$

$$4x - 3 = 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$$g(4x - 3) = x \text{ 의 양변에 } x = 1 \text{ 을 대입하면 } g(1) = 1$$

8. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ 2x + 1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 7$ 일 때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
 $g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) &= (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) \\ &= f^{-1}(2) \end{aligned}$$

$(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$

그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로

이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.

따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
 $4a^2 = 1$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$$

9. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} \text{의 우변을 통분하여 계산하면}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4} \end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -2$$

$$\therefore a+b = -3$$

10. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ 을 간단히 하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

11. $2x = 3y = 4z$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2 - z^2}{xy - yz - zx}$ 의 값은?

- ① 6 ② $-\frac{6}{11}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $-\frac{11}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$$2x = 3y = 4z = k (k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{4}$$

$$\frac{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16}}{\frac{k^2}{6} - \frac{k^2}{12} - \frac{k^2}{8}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8}} = -\frac{11}{6}$$

12. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x \text{에서}$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$

13. 분수함수 $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 가 성립하는 함수 $g(x)$ 에서 $g(3)$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g(f(x)) = x$$

$\therefore g(3)$ 을 구하려면

$f(x) = 3$ 인 x 를 찾으면 된다.

$$3 = \frac{2x-1}{x-1} \text{에서 } x = 2$$

$$\therefore g(3) = g(f(2)) = 2$$

14. $x = 1$ 일 때,

$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{11}$

② $\frac{10}{11}$

③ $\frac{12}{11}$

④ $\frac{8}{9}$

⑤ $\frac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ & \quad + \frac{3}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{4}{4} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ 대입하면 } \frac{1}{1} - \frac{1}{1+10} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

15. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ 일 때, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 의 값은 ? (단, $x > 0$)

① $\sqrt{3}$

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{7}$

④ 3

⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3 \quad (\because x > 0)$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 5$$

$$\therefore \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$$

16. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

① $\frac{2}{7}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

17. 분수식 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

② $\frac{x^2+2}{x(x-1)}$

③ $\frac{x^2+2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x^2+1}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+1)}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\
 &= \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\
 &= \frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\
 &= \frac{(2x^2+2)x - (x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(x^2+1)(2x-x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x^2+1}{x(x-1)}
 \end{aligned}$$

18. 한 학생이 1년 동안 구입한 참고서와 교양서적을 비교하였더니, 1학기에는 1 : 3의 비율로 구입하고 2학기에는 5 : 3의 비율로 구입하여 1년 동안 구입한 비율이 3 : 5이었다. 다음 중 1년 동안 구입한 서적의 수로 볼 수 있는 것은?

① 32권

② 40권

③ 48권

④ 54권

⑤ 64권

해설

	참고서	교양서적
1학기	$\frac{a}{4}$	$\frac{3}{4}a$
2학기	$\frac{5}{8}b$	$\frac{3}{8}b$

1년 동안 구입한 서적 수의 비는

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{5}{8}b\right) : \left(\frac{3}{4}a + \frac{3}{8}b\right) = 3 : 5$$

$$\frac{10a + 25b}{8} = \frac{18a + 9b}{8}, 8a = 16b$$

$$\therefore a = 2b$$

1년 동안 구입한 서적의 수는

$a + b = 3b$ 이고 b 가 8의 배수이므로

$a + b$ 는 24의 배수이다.

따라서 서적의 수로 볼 수 있는 것은 48권이다.