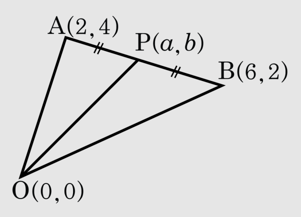
1. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$



2. 세 점 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(2,-3)$, $\mathrm{C}(k,k-1)$ 이 같은 직선위에 있도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 $=$ $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기

$\Rightarrow$ $\frac{k-1+3}{k-2} = \frac{-3-1}{2-(-1)}$

$\Rightarrow$ $k = \frac{2}{7}$

3. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0,\ 0)$을 지나므로

$(-3)+k(-3)=0 \quad \therefore\ k=-1$

$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$을 정리하면

$\therefore\ x-2y=0$

$a=1,\ b=-2 \quad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

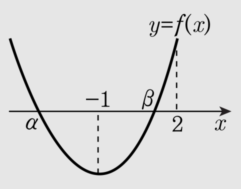
4. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$　　② $-2 < a < 1$　　③ $0 < a < 2$

④ $1 < a < 2$　　⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0,\ f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1-2a+a^2-1 < 0$ 에서 $a^2-2a < 0,\ a(a-2) < 0$

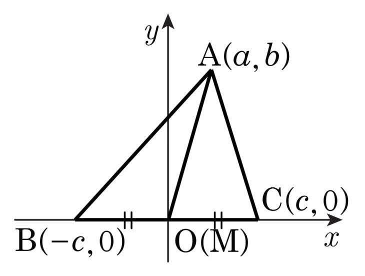
$\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0,\ (a+3)(a+1) > 0$

$\therefore a < -3,\ a > -1$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 2$

5. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (가) $\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$ 이 성립함을 보이는 과정이다. (가) ~ (다)에 들어갈 말을 나열한 것으로 옳은 것은?

> 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 한 변 BC 를 x 축, 변 BC 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면 M 은 원점이 된다.
>
> 
>
>
> 이때, 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 으로 놓으면
> (나) $= \left\{(a+c)^2 + b^2\right\} + \left\{(a-c)^2 + b^2\right\}$
> $= 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdots$ ㉠
> (다) $= \left(a^2 + b^2\right) + (-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \cdots$ ㉡
> ㉠, ㉡으로부터
> $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (가) $\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$

① 2, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$

② 2. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

③ 3, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$

④ 3. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

⑤ 4, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

해설

파푸스의 정리에서
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
$= \left\{(a+c)^2 + b^2\right\} + \left\{(a-c)^2 + b^2\right\}$
$= 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$
$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \left(a^2 + b^2\right) + (-c)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2$
$\therefore\ \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$

6. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $P(-1, -1)$ ③ $P(0, 0)$
④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

7. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$　　② $y=\frac{1}{2}x$　　③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=\frac{1}{4}x$　　⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면,
(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$
$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$
즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$
그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0 \\ x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x 의 범위가 $1 < x \le 2$ 일 때, k 의 범위는?

① $k > -1$　　② $k > 0$　　③ $k < -1$

④ $k < 1$　　⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \le 0$ 에서

$(x+1)(x-2) \le 0$　$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - (k+3)x + k + 2 < 0$ 에서

$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \cdots\cdots$ ㉡

i) $k + 2 < 1$ 이면

㉡의 해는 $k + 2 < x < 1$ 가 되므로

㉠, ㉡ 의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k + 2 > 1$ 이면

㉡의 해는 $1 < x < k + 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢의 공통범위가 $1 < x \le 2$ 가 되려면

$k + 2 > 2$　$\therefore k > 0$

9. 원점과 직선 $2x-y-5+k(x+2y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\dfrac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{5}$　　② $\dfrac{2}{5}$　　③ $\dfrac{3}{5}$　　④ $\dfrac{4}{5}$　　⑤ 1

해설

점 $P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

원점과 직선$(2+k)x+(2k-1)y-5=0$ 사이의 거리

$f(k)$ 는 $f(k)=\dfrac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2+(2k-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\{f(k)\}^2}=\dfrac{k^2+1}{5}$

따라서, $k=0$ 일 때, 최솟값$\dfrac{1}{\{f(0)\}^2}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

10. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a + b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \le 0$에서

$([x] + 4)([x] - 3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a = -4,\ b = 4$이므로 $a + b = 0$이다