

1. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
넓이가 같으므로

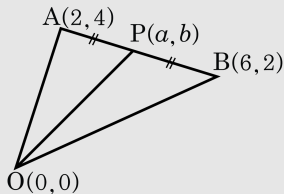
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이라면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



2. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(k, k-1)$ 이 같은 직선위에 있도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $-\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \overline{BC}$ 의 기울기 = $\overline{AB}$ 의 기울기

$$\Rightarrow \frac{k-1+3}{k-2} = \frac{-3-1}{2-(-1)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{7}$$

3. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax + by = 0$ 이라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(2x - y - 3) + k(x + y - 3) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(-3) + k(-3) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$(2x - y - 3) + (-1)(x + y - 3) = 0$ 을 정리하면

$$\therefore x - 2y = 0$$

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

4. 이차방정식 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$

② $-2 < a < 1$

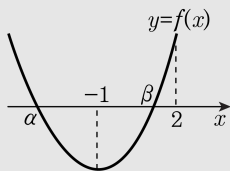
③ $0 < a < 2$

④ $1 < a < 2$

⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

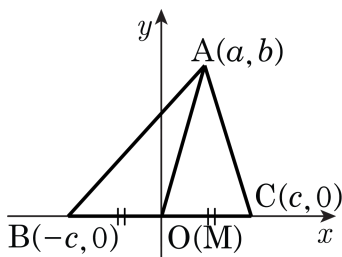
(i) $f(-1) = 1 - 2a + a^2 - 1 < 0$ 에서 $a^2 - 2a < 0$, $a(a - 2) < 0$
 $\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a + 3)(a + 1) > 0$
 $\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

5. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$
 $\textcircled{\text{가}} (\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이 성립함을 보이는 과정이다. $\textcircled{\text{가}} \sim \textcircled{\text{다}}$ 에 들어갈
 말을 나열한 것으로 옳은 것은?

다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 한 변 BC 를
 x 축, 변 BC 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면 M 은 원점이
 된다.



이때, 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$
 으로 놓으면

$$\textcircled{\text{나}} = \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) \dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$\textcircled{\text{다}} = (a^2 + b^2) + (-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 으로부터

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \textcircled{\text{가}} (\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

- ① 2, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$
- ② 2, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$
- ③ 3, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$
- ④ 3, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$
- ⑤ 4, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

해설

파푸스의 정리에서

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (a^2 + b^2) + (-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

6. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

② $P(-1, -1)$

③ $P(0, 0)$

④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

7. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$$

$$\text{즉, } x - 3y = 0, 3x + y - 2 = 0$$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x$$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x^2 - (k+3)x + k+2 < 0 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 x 의 범위가 $1 < x \leq 2$ 일 때, k 의 범위는?

① $k > -1$

② $k > 0$

③ $k < -1$

④ $k < 1$

⑤ $k > -2$

해설

$x^2 - x - 2 \leq 0$ 에서

$$(x+1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 - (k+3)x + k+2 < 0$ 에서

$$\{x - (k+2)\} \cdot (x-1) < 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

i) $k+2 < 1$ 이면

㉡의 해는 $k+2 < x < 1$ 가 되므로

㉠, ㉡의 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 가 될 수 없다.

ii) $k+2 > 1$ 이면

㉡의 해는 $1 < x < k+2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉠, ㉢의 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 가 되려면

$$k+2 > 2 \quad \therefore k > 0$$

9. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ 1

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점과 직선 $(2+k)x + (2k-1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$$f(k) \text{ 는 } f(k) = \frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{5}$ 이다.

10. 이차부등식 $[x]^2 + [x] - 12 \leq 0$ 의 해가 $a \leq x < b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$[x]^2 + [x] - 12 \leq 0$ 에서

$$([x] + 4)([x] - 3) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq [x] \leq 3$$

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\therefore -4 \leq x < 4$$

따라서 $a = -4$, $b = 4$ 이므로 $a + b = 0$ 이다