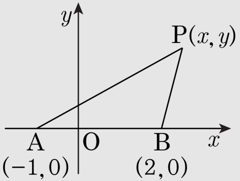
1. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면



$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

2. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 의 자취의 길이는?

① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

해설

좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 $(-3,0)$ 과 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

즉 반지름이 $\frac{2}{3}$ 이 원의 둘레의 길이는 $\frac{8}{3}\pi$ 이다.

3. 두 정점 A(0, 0), B(0, 6) 에서의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2+1}\right) = (0,\ 4)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2-1}\right) = (0,\ 12)$

$\therefore$ 중심은 (0, 8) 이고, 반지름이 4 인 원

$\Rightarrow$ 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$

4. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면
$\overline{PA} : \overline{PB} = 2:3$
즉 $4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\} = 9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$

5. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1:2$ 인 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$
$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BP}}=2\overline{\mathrm{AP}}$
$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BP}}^2=4\overline{\mathrm{AP}}^2$
$\Rightarrow\ x^2+(y-2)^2=4\left\{x^2+(y+1)^2\right\}$
$\Rightarrow\ x^2+y^2+4y=0$
$\Rightarrow\ x^2+(y+2)^2=4$
반지름이 2 인 원이므로 도형의 길이는 4π

6. 두 점 A(−2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$
② $x^2 + y^2 + 4x = 0$
③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$
④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$

즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로

$4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} = (x+2)^2 + y^2$

$3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x = 0$

7. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 가 있다. 이 원에 접하는 접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점을 P 라 할 때, 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① 4π ② $5\sqrt{2}\pi$ ③ $6\sqrt{2}\pi$ ④ $7\sqrt{3}\pi$ ⑤ 8π

해설

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 에 접하는
접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점은
원의 중심으로부터의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다.
따라서 점 P 의 자취는 $6\sqrt{2}\pi$

8. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(x+y,\ x-y)$ 의 자취는 원을 나타낸다. 이 원의 넓이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$X=x+y$, $Y=x-y$ 로 놓고, x, y 에 관하여 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{2}(X+Y)$,

$y=\frac{1}{2}(X-Y)$

이것을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$X^2+Y^2=(\sqrt{2})^2$

따라서 구하는 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$

9. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$ 이 있다.
이 원 밖의 임의의 한 점에서 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 직교하는 점들의 자취방정식의 자취의 길이는?

① π　　② 5π　　③ $\sqrt{10}\pi$
④ $2\sqrt{10}\pi$　　⑤ 10π

해설

주어진 원은 중심이 $(-1,-2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원이다.
원 밖의 한 점 $P(a,b)$ 에서 원에 그은 접선이 서로 수직이려면 원의 중심에서 P까지의
거리가 $\sqrt{10}$ 이어야 한다.
따라서 두 접선이 직교하는 접들의 자취의 방정식은 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$

10. 두 점 A(0, 0), B(3, 3)에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} \geq 2$ 가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

① 8π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 4π ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ 16π

해설

점 P를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} \geq 2\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{x^2+y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하면 $x^2+y^2 \geq 4(x-3)^2+4(y-3)^2$
$\therefore\ x^2-8x+y^2-8y+24 \leq 0$
즉, $(x-4)^2+(y-4)^2 \leq 8$
따라서 구하는 자취는 중심이 $(4,\ 4)$ 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.
그러므로 구하는 넓이는 8π 이다.

11. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$

② $(x-4)^2+(y-4)^2=1$

③ $(x+4)^2+(y-4)^2=1$

④ $(x+4)^2+(y+4)^2=1$

⑤ $(x-4)^2+(y+4)^2=1$

해설

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$라 하면

$A(7,7), P(a,b)$의 중점의 좌표 $M(x,y)$는

$M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.

$\therefore\ x=\frac{a+7}{2},\quad y=\frac{b+7}{2}$

$\therefore\ a=2x-7,\ b=2y-7$

이 때, 점 P는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

위의 점이므로 $(a-1)^2+(b-1)^2=4$ 가 성립한다.

$(2x-8)^2+(2y-8)^2=4$

$\therefore (x-4)^2+(y-4)^2=1$

12. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.
$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$
따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,
반지름의 길이가 1인 원이므로
원이 넓이 S 는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

13. 점 $A(0, 6)$과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

원 위의 점을 $P(a,\ b)$,
선분 AP의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면
$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{6+b}{2}$
$\therefore\ a = 2x,\ b = 2(y-3) \cdots\cdots$ ㉠
이 때, 점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로
$a^2 + b^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $4x^2 + 4(y-3)^2 = 4$
$\therefore\ x^2 + (y-3)^2 = 1$
따라서, 선분 AP의 중점 M은 중심이 $(0,\ 3)$
이고, 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 길이는 $2\pi \cdot 1 = 2\pi$

14. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

15. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\dfrac{2\times4-1\times1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

$\therefore$ 중심은 $(5,\ 0)$ 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

16. 두 점 A$(-4,\ 2)$, B$(2,\ -1)$로 부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y=3x-4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$

$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x-y-4=0$ 간의 거리

$\therefore \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

17. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 $90°$ 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$

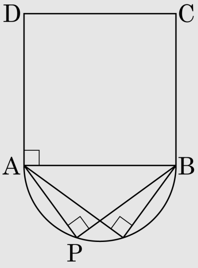
④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 $90°$ 되는점 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi\left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$



18. 점 A(0, 6) 과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다. 이 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원위의 점을 $(X,\ Y)$ 라 하면, $X^2+Y^2=4$

중점 M 은

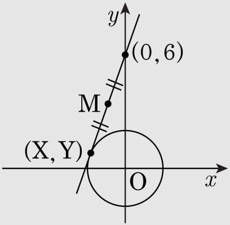
$$\mathrm{M}\left(\frac{X}{2},\ \frac{Y+6}{2}\right)=(x,\ y)$$

$X=2x,\ Y=2y-6$ 대입하면

$(2x)^2+(2y-6)^2=4$

$x^2+(y-3)^2=1$

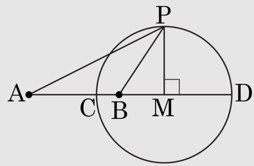
$a=0,\ b=3,\ r=1$



19. 두 점 $A(1,1)$, $B(7,4)$ 에서 이르는 거리의 비가 $2:1$ 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle PAB)$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설



점 P 의 자취는 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점 C와 $2:1$ 로 외분하는 점 D 를
지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right)$, 즉 $C(5,3)$

점 D 의 좌표는

$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right)$ 즉, $D(13,7)$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

즉, $M(9,5)$ 이므로

$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 $(9,5)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$(x-9)^2+(y-5)^2 = 20$

그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인 경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

이 때, $\overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2+(5-1)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{PM} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

20. 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1인 원을 표시한다. 이 원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$$

$\dfrac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$ ㉠

중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$ 에서

$x=-\dfrac{a}{2},\ y=-\dfrac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$