1. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a \quad \cdots\cdots$ ㉠
(두 근의 곱) $= (1 + 2i)(1 - 2i) = b \quad \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서
$a = -2,\ b = 5$ 이다.

2. 이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^4+\beta^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=-2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=13$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2(-2)^2=161$

3. 이차방정식 $x^2-14kx+96k=0$의 두 근의 비가 $3:4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=2$

해설

두 근을 $3\alpha,\ 4\alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha+4\alpha=14k\cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha\cdot 4\alpha=96k\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $7\alpha=14k\ \ \therefore \alpha=2k\cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $12\alpha^2=96k\ \ \therefore \alpha^2=8k\cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2=8k,\ 4k(k-2)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=2$
따라서 양수 k의 값은 $k=2$이다.

4. A, B두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$$

B는 a와 b는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

5. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c$, $a=-b$, $c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1$, $\alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$