

1. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

① $A = \{\emptyset\}$ 이면 $n(A) = 0$

② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \emptyset$

⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

① $A = \{\emptyset\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\emptyset$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.

③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.

⑤ $A = \emptyset$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset$ 하나 밖에 없다.

2. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 이므로 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 집합이다. 이를 만족하는 집합 X 의 개수는

$\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 의 8개이다.

3. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B - A = \{8, 10\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 원소가 아닌 것은?

① 2

② 3

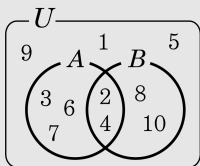
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면



$$\therefore A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

[별해] $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 이므로

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이다.

$$A = (A \cup B) - (B - A) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$$

4. 두 집합 A, B 가 $A \subset B, B \subset A$ 일 때, 다음 보기 중 옳지 않은 것을 골라라. (단, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$)

보기

㉠ $A \cup B = A$

㉡ $A \cap B = A$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

㉣ $n(A) = n(A \cap B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A)$

㉥ $n(A) - n(B) = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) = n(B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A) = 0$

5. 두 집합 $A = \{2, 4, a^2 - a - 1\}$, $B = \{2, a + 2, a^2 - 2a\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때의 a 값을 구하고 이 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 b 라 하면 다음 중 $a \times b$ 를 맞게 계산한 것은?

① -22

② 15

③ 33

④ 13

⑤ 11

해설

$$A \cap B = \{2, 5\} \text{ 이므로 } a^2 - a - 1 = 5$$

$$a^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0,$$

$$a = -2 \text{ 또는 } 3$$

$a = -2$ 이면 $B = \{2, 0, 3\}$ 이므로 조건에 어긋난다.

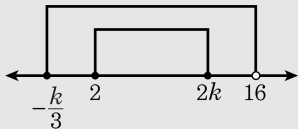
$$\therefore a = 3$$

그리고 $A = \{2, 4, 5\}$ 이므로 원소의 합 $b = 11 \therefore ab = 33$

6. 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 2k$, $q : -\frac{k}{3} \leq x < 16$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다.’가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \geq 1$)

- ① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설



$-\frac{k}{3} \leq 2 \rightarrow k \geq -6, 2k < 16 \rightarrow k < 8, 1 \leq k < 8$ 이므로
정수 k 의 개수는 7개

7. a, b, c 는 실수이다. 명제 ' $a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이면 $a = b = c$ 이다.'의 대우는 ?

① a, b, c 가 모두 서로 다른 수이면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

② $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이면, $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

③ a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

④ $a = b = c$ 이면 $a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이다.

⑤ $a \neq b, c = 0$ 이면 $a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이다.

해설

a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

8. 두 조건 $p: -5 \leq x < 6$, $q: 2a - 3 < x \leq a + 2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

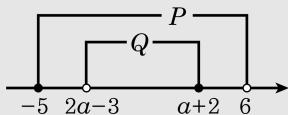
$$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\},$$

$$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \leq a + 2\}$$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$$\therefore Q \subset P$$

따라서, 다음 수직선에서



$$2a - 3 \geq -5 \text{ 이고 } a + 2 < 6$$

$$2a \geq -2 \text{ 이고 } a < 4$$

$$\therefore -1 \leq a < 4$$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

9. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① r 은 p 이기 위한 충분조건
- ② s 는 r 이기 위한 필요충분조건
- ③ r 은 q 이기 위한 필요충분조건
- ④ s 는 p 이기 위한 필요조건
- ⑤ s 는 q 이기 위한 필요충분조건

해설

- ① $r \rightarrow p$
- ② $s \leftrightarrow r, r \leftrightarrow s$
- ③ $r \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r$
- ④ $s \rightarrow p$
- ⑤ $s \leftrightarrow q, q \leftrightarrow s$

10. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$

④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a + ab - b - ab}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$

$$(\because a > b > 0)$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

11. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 와 $xy + yz + zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\
 &= \frac{1}{2} \{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx\} \\
 &= \frac{1}{2} \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \text{ ([가]) } 0 \text{ 이므로} \\
 & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)}
 \end{aligned}$$

① $<, x = y = z$

② $\leq, x = y = z$

③ $\geq, x = y = z$

④ $<, xy = yz = zx$

⑤ $\leq, xy = yz = zx$

해설

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\
 &= \frac{1}{2} \{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx\} \\
 &= \frac{1}{2} \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \geq 0 \text{ 이므로} \\
 & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 } x = y = z \text{ 일 때 성립)}
 \end{aligned}$$

12. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

13. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = 2x + 5$

② $(f \circ g)(x) = 2x + 2$

③ $(f \circ g)(x) = x$

④ $(f \circ g)(x) = -x + 1$

⑤ $(f \circ g)(x) = 3x - 4$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$$

14. 함수 $f(x) = 2x - 1, g(x) = \sqrt{x-1}$ 에 대하여 $(f \circ (f \circ g)^{-1}f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (f \circ g)^{-1}f)(2) &= (f \circ g^{-1})(2) \\ &= f(g^{-1}(2))\end{aligned}$$

$$g^{-1}(2) = k \text{ 라면 } g(k) = 2$$

$$g(k) = \sqrt{(k-1)} = 2 \rightarrow k = 5$$

$$\therefore f(g^{-1}(2)) = f(5) = 10 - 1 = 9$$

15. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a) + f(b) = f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다.
 $f(2) = \alpha, f(3) = \beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha + \beta)$ 의 값을
구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a) + f(b) = f(ab)$ 에 $a = 2, b = 3$ 을 대입하면

$$f(2) + f(3) = f(6)$$

$$\therefore f(6) = \alpha + \beta$$

$$\therefore f^{-1}(\alpha + \beta) = 6$$

$$\therefore g(\alpha + \beta) = 6$$

16. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

17. 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x^3$ 에 대하여 다음 <보기>에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

$$\begin{array}{ll} \text{I. } f(g(x)) & \text{II. } g(g(x)) \\ \text{III. } \{g(x)\}^2 & \text{IV. } \frac{g(x)}{f(x)} \end{array}$$

- ① I, II ② I, IV ③ II, III ④ II, IV ⑤ III, IV

해설

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 에서

I. $F(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

II. $F(x) = g(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

III. $F(x) = \{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$$F(-x) = \{g(-x)\}^2$$

$$= \{-g(x)\}^2 = \{g(x)\}^2$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

IV. $F(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$$F(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = -\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 II, IV

18. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \leq x \leq 2$) 의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1 \quad \therefore y = x + 1$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0 \quad \therefore y = x$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1 \quad \therefore y = x - 1$

$x = 2$ 일 때, $[x] = 2 \quad \therefore y = 0$

따라서, $y = x - [x]$ ($-1 \leq x \leq 2$) 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

19. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

- ㉠ 우리 반에서는 100m를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1시간씩 달리기 연습을 한다.
- ㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.
- ㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.
- ㉣ 평균이 85점 이상인 학생은 우등생이다.
- ㉤ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임
- ㉥ 영토가 아름다운 국가의 모임
- ㉦ 10에 가장 가까운 자연수의 모임

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

- ㉠ ‘잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉡ ‘좋은’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘운동을 잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉣ ‘평균이 85점 이상인’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉤ ‘비교적’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉥ ‘아름다운’은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

20. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 a, b 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a 는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b, a \in A, b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개

② 4 개

③ 8 개

④ 16 개

⑤ 32 개

해설

$b \backslash a$	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

21. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.

따라서 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$, $n = 5$ (최솟값)

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = X$,

$n = 10$ (최댓값)

$\therefore 10 - 5 = 5$

22. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$$2^{n-2} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 6, n = 8$$

23. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k (k = 1, 2, \dots, 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$$A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$$

$$B = \{1, 9, 16, 81, 100\}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$$

24. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$

② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10, 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10, 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

25. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$

$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.

따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

26. 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A = \{a | a \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$, $B = \{b | b \text{는 } 36 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ 의 모든 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 95

해설

$$A = \{a | a \text{는 } 24 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{b | b \text{는 } 36 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{8, 9, 18, 24, 36\}\end{aligned}$$

따라서 원소의 총합은 $8 + 9 + 18 + 24 + 36 = 95$

27. 세 권의 책 A, B, C가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가?

① 1명

② 2명

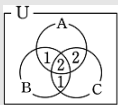
③ 3명

④ 4명

⑤ 5명

해설

집합 A, B, C를 각각 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합이라 하면 $n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ C만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A와 C, B와 C를 읽은 학생수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$$7 - (2 + 2 + 1) = 2(\text{명})$$

28. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2 \quad \boxed{\text{㉠}} \quad 0$$

이것을 t 에 관하여 정리하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉡}} \quad 0$$

따라서 항상 성립하기 위해서는

$$(ax + by + cz + dw)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \quad \boxed{\text{㉢}} \quad 0 \dots \dots (\text{이하 생략})$$

① $>, <$

② $\geq, <$

③ $\leq, >$

④ $\leq, \geq$

⑤ $\geq, \leq$

해설

생략

29. 함수 $f(x)$ 가 임의의 x, y 에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족시킬 때 $2f(0) + f(2)$ 의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 는 임의의 x, y 에 대하여 항상 성립하므로

$$x = 1, y = 0 \text{ 일 때 } f(1) \cdot f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = 2 \quad (\because f(1) = 1)$$

$$x = 1, y = 1 \text{ 일 때 } f(1) \cdot f(1) = f(2) + f(0) \text{ 에서 } 1 = f(2) + 2$$

$$\therefore f(2) = -1$$

$$\therefore 2f(0) + f(2) = 4 - 1 = 3$$

30. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10

② -5

③ 1

④ 5

⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

$\vdots$

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$