1. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$

② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \varnothing$

⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\varnothing$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.
③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.
⑤ $A = \varnothing$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\varnothing$ 하나 밖에 없다.

2. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 5 이하의 자연수$\}$, $B = \{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$에 대하여
$(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설

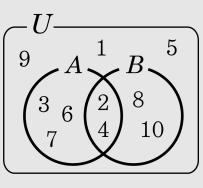
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$
$A \cap B = \{1, 3, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 이므로 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 집합이다. 이를 만족하는 집합 X 의 개수는
$\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 4, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$의 8개이다.

3. 전체집합 $U = \{x | x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B - A = \{8, 10\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 일 때, 집합 A의 원소가 아닌 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면



$\therefore A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

[별해] $(A \cup B)^C = \{1, 5, 9\}$ 이므로

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이다.

$A = (A \cup B) - (B - A) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

4. 두 집합 A, B가 $A \subset B$, $B \subset A$일 때, 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라. (단, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$)

보기

㉠ $A \cup B = A$

㉡ $A \cap B = A$

㉢ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

㉣ $n(A) = n(A \cap B)$

㉤ $n(A - B) = n(B - A)$

㉥ $n(A) - n(B) = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A = B$
㉢ $n(A \cup B) = n(A) = n(B)$
㉤ $n(A - B) = n(B - A) = 0$

5. 두 집합 $A = \{2, 4, a^2 - a - 1\}$, $B = \{2, a + 2, a^2 - 2a\}$에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$일 때의 a값을 구하고 이 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 b라 하면 다음 중 $a \times b$를 맞게 계산한 것은?

① -22 ② 15 ③ 33 ④ 13 ⑤ 11

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 $a^2 - a - 1 = 5$

$a^2 - a - 6 = 0,\ (a - 3)(a + 2) = 0,$

$a = -2$ 또는 3

$a = -2$ 이면 $B = \{2, 0, 3\}$이므로 조건에 어긋난다.

$\therefore\ a = 3$

그리고 $A = \{2, 4, 5\}$이므로 원소의 합 $b = 11$ $\therefore\ ab = 33$

6. 두 조건 $p : 2 \le x \le 2k$, $q : -\frac{k}{3} \le x < 16$ 에 대하여 'p이면 q 이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \ge 1$)

① 7 개　② 8 개　③ 12 개　④ 15 개　⑤ 16 개

해설

$-\frac{k}{3} \le 2 \rightarrow k \ge -6,\ 2k < 16 \rightarrow k < 8,\ 1 \le k < 8$이므로

정수 k의 개수는 7개

7. a, b, c 는 실수이다. 명제 '$a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이면 $a = b = c$ 이다.' 의 대우는 ?

① a, b, c 가 모두 서로 다른 수이면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

② $a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이면, $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

③ a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

④ $a = b = c$ 이면 $a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이다.

⑤ $a \neq b$, $c = 0$ 이면 $a^2 + c^2 = 2b(a + c - b)$ 이다.

해설

a, b, c 중 서로 다른 두 수가 있으면 $a^2 + c^2 \neq 2b(a + c - b)$ 이다.

8. 두 조건 $p : -5 \le x < 6$, $q : 2a - 3 < x \le a + 2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면
$P = \{x \mid -5 \le x < 6\}$,
$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \le a + 2\}$
이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
$\therefore\ Q \subset P$
따라서, 다음 수직선에서

$2a - 3 \ge -5$ 이고 $a + 2 < 6$
$2a \ge -2$ 이고 $a < 4$
$\therefore\ -1 \le a < 4$
따라서, 정수 a 는 -1, 0, 1, 2, 3 의 5 개이다.

9. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① r은 p이기 위한 충분조건

② s는 r이기 위한 필요충분조건

③ r은 q이기 위한 필요충분조건

④ s는 p 이기 위한 필요조건

⑤ s는 q이기 위한 필요충분조건

해설

① $r \rightarrow p$

② $s \leftrightarrow r$, $r \leftrightarrow s$

③ $r \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$

④ $s \rightarrow p$

⑤ $s \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow s$

10. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1+a}$와 $\dfrac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$　② $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$　④ $\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$
$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$
$(\because a > b > 0)$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

해설

$a > b > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1+b}{b}$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

11. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나]에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \text{ ([가])0 이므로} \\ & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)} \end{aligned}$$

① $<$, $x=y=z$ ② $\leq$, $x=y=z$

③ $\geq$, $x=y=z$ ④ $<$, $xy=yz=zx$

⑤ $\leq$, $xy=yz=zx$

해설

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geq 0 \text{ 이므로} \\ & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ (단, 등호는 } x=y=z \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

12. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$

13. 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=2x-1$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=2x+5$ ② $(f\circ g)(x)=2x+2$

③ $(f\circ g)(x)=x$ ④ $(f\circ g)(x)=-x+1$

⑤ $(f\circ g)(x)=3x-4$

해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)+3=2x+2$

14. 함수 $f(x)=2x-1, g(x)=\sqrt{x-1}$ 에 대하여 $(f\circ(f\circ g)^{-1}f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}(f\cdot(f\cdot g)^{-1}f)(2)&=(f\cdot g^{-1})(2)\\&=f(g^{-1}(2))\end{aligned}$$

$g^{-1}(2)=k$라면 $g(k)=2$

$g(k)=\sqrt{(k-1)}=2\to k=5$

$\therefore\ f(g^{-1}(2))=f(5)=10-1=9$

15. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(2)=\alpha$, $f(3)=\beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a)+f(b)=f(ab)$ 에 $a=2$, $b=3$ 을 대입하면
$f(2)+f(3)=f(6)$
$\therefore\ f(6)=\alpha+\beta$
$\therefore\ f^{-1}(\alpha+\beta)=6$
$\therefore\ g(\alpha+\beta)=6$

16. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $y = 2|x-1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M , m 의 합 $M+m$ 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$y = 2|x-1| + x$ 에서

(i) $x \ge 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \le x \le 3$ 에서 $y = 2|x-1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7 , $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$M + m = 7 + 1 = 8$

17. 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x^3$ 에 대하여 다음 <보기>에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

Ⅰ. $f(g(x))$　　Ⅱ. $g(g(x))$

Ⅲ. $\{g(x)\}^2$　　Ⅳ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅳ　③ Ⅱ, Ⅲ　④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 에서

Ⅰ. $F(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$

$\therefore\ F(-x) = F(x)$

Ⅱ. $F(x) = g(g(x))$ 로 놓으면

$F(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$

$\therefore\ F(-x) = -F(x)$

Ⅲ. $F(x) = \{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$F(-x) = \{g(-x)\}^2$

$= \{-g(x)\}^2 = \{g(x)\}^2$

$\therefore\ F(-x) = F(x)$

Ⅳ. $F(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$F(-x) = \dfrac{g(-x)}{f(-x)} = -\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\therefore\ F(-x) = -F(x)$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 Ⅱ, Ⅳ

18. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \le x \le 2$)의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ $\therefore y = x + 1$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ $\therefore y = x$
$1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ $\therefore y = x - 1$
$x = 2$ 일 때, $[x] = 2$ $\therefore y = 0$
따라서, $y = x - [x]$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

19. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

㉠ 우리 반에서는 100 m를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1 시간씩 달리기 연습을 한다.
㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.
㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.
㉣ 평균이 85 점 이상인 학생은 우등생이다.
㉤ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임
㉥ 영토가 아름다운 국가의 모임
㉦ 10에 가장 가까운 자연수의 모임

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
㉡ '좋은' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
㉢ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
㉤ '비교적' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
㉥ '아름다운' 은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

20. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 $a,\ b$ 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b,\ a \in A,\ b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

b \ a	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

21. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$, $X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.
따라서 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$, $n = 5$ (최솟값)
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = X$,
$n = 10$ (최댓값)
$\therefore\ 10 - 5 = 5$

22. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로
$2^{n-2} = 64 = 2^6$ 이다.
$\therefore n-2 = 6,\ n = 8$

23. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$

$B = \{1,\ 9,\ 16,\ 81,\ 100\}$

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$

24. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$　　② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$　　④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10,\ 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10,\ 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

25. $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A, (A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$
$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.
따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$(개) 이다.

26. 자연수 전체의 집합의 부분집합 $A = \{a|a\text{는 }24\text{의 약수}\}$, $B = \{b|b\text{는 }36\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ 의 모든 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 95

해설

$A = \{a|a \text{ 는 } 24 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$B = \{b|b \text{ 는 } 36 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{8, 9, 18, 24, 36\}\end{aligned}$$

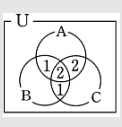
따라서 원소의 총합은 $8 + 9 + 18 + 24 + 36 = 95$

27. 세 권의 책 A, B, C 가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4 명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가?

① 1 명 ② 2 명 ③ 3 명 ④ 4 명 ⑤ 5 명

해설

집합 A, B, C를 각각 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합이라 하면 $n(A)=5$, $n(B)=4$, $n(C)=7$, $n(A\cap B)=3$, $n(A\cap B\cap C)=2$
C만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A와 C, B와 C를 읽은 학생수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$7-(2+2+1)=2$(명)

28. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ ㉠ 0
이것을 t에 관하여 정리하면
$(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
$+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ ㉠ 0
따라서 항상 성립하기 위해서는
$(ax+by+cz+dw)^2-$
$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ ㉡ 0 ……(이하 생략)

① >, < ② ≥, < ③ ≤, > ④ ≤, ≥ ⑤ ≥, ≤

해설

생략

29. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0)+f(2)$의 값은? (단, $f(1)=1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 는 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 항상 성립하므로

$x=1,\ y=0$ 일 때 $f(1)\cdot f(0)=f(1)+f(1)$

$\therefore\ f(0)=2\ (\because\ f(1)=1)$

$x=1,\ y=1$ 일 때 $f(1)\cdot f(1)=f(2)+f(0)$ 에서 $1=f(2)+2$

$\therefore\ f(2)=-1$

$\therefore\ 2f(0)+f(2)=4-1=3$

30. 함수 $f(x) = x-1$ 에 대하여 $\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 11

해설

$f(x) = x-1$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1)-1 = x-2$
$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x-2) = (x-2)-1 = x-3$
$\vdots$
$\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x) = x-10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a-10 = 1$ 에서 $a = 11$