1. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$ ② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$ ④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4} < 0$ 에서 $-b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$
$\therefore b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

2. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 6 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a - b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 6\}$,
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 6\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 6\}$,
$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$,
$\{5,\ 6\}$
따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (개) 이다.
집합 A 의 부분집합 중 원소가 6 개인 집합은 자기 자신인 집합 A 뿐이다.
$a = 15,\ b = 1$ 이므로 $a - b = 14$

3. 두 집합 $A = \{1,\ 5,\ a\}$, $B = \{5,\ 7,\ b\}$ 이고 $A \subset B$ 일 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것을 골라라.

㉠ $a = 5$	㉡ $b = 1$	㉢ $B \subset A$
㉣ $A = B$	㉤ $a + b = 8$	

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

$A \subset B$ 조건을 만족하기 위해선 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 안에 포함되어야 하므로 $b = 1$ 이고,
a 는 1, 5, 7 중 한 가지가 되어야하지만 이미 집합 A 에 1, 5 가 존재하므로 $a = 7$ 이 되어 $A = B$ 가 된다.
㉠ $a = 7$

4. 다음 중 명제 '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.

② 모든 실수의 제곱은 양수이다.

③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.

④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.

⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

'어떤' 의 부정은 '모든' 이고 '음수이다.' 의 부정은 '음수가 아니다.' 이다.
따라서, '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정은 '모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.' 이다.

5. 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 '반드시 참이다' 라고 말할 수 <u>없는</u> 명제는?

① $q \to r$　② $p \to r$　③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$p \to q \leftrightarrow \sim q \to \sim p$ $\sim r \to \sim q \leftrightarrow q \to r$ $p \to q$, $q \to r$ 이므로

$p \to r \leftrightarrow r \to \sim p$

6. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ a \le -1$
또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ b \ge 3$
따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

7. a, b가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a|+|b| \geq |a+b|$　　㉡ $|a+b| \geq |a-b|$

㉢ $|a-b| \geq ||a|-|b||$　　㉣ $|a+b| \geq ||a|-|b||$

① ㉠　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a|\cdot|b|$
$|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$
$2|a\|b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$
$|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$
$2ab \geq -2ab$ ⇒ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a-b|^2 = a^2-2ab+b^2$
$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a\|b|+b^2$
$-2ab \geq -2|a\|b|$ ($\because$ $|a\|b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a+b|^2 = a^2+2ab+b^2$
$||a|-|b||^2 = a^2-2|a\|b|+b^2$
$2ab > -2|a\|b|$ (참)

8. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4라 하자.
$\overline{C_1C_2}+\overline{C_2C_3}+\overline{C_3C_4}=14\sqrt{10}$ 일 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$C_1(r,r)$, $C_2\left(-\frac{1}{2}r,\frac{1}{2}r\right)$,

$C_3\left(-\frac{1}{4}r,-\frac{1}{4}r\right)$, $C_4\left(\frac{1}{8}r,-\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$\overline{C_1C_2}+\overline{C_2C_3}+\overline{C_3C_4}$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$

$+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$

$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$

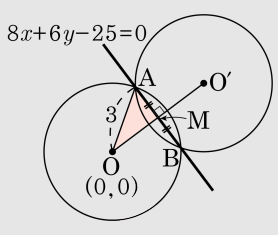
$\therefore r=16$

9. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

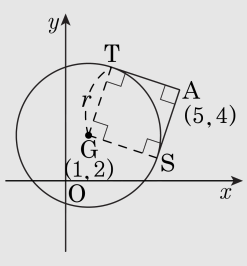
10. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

좌표평면 그림으로 나타내면 점 A에서 그은 접선이 서로 수직이므로 원의 중심 G, 접점 S와 T, 점 A로 이루어지는 □GSAT는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.

$\therefore\ r=\dfrac{\overline{\mathrm{GA}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{10}$



해설

중심을 C라 하고 두 접점을 각각 T, T′이라고 하면 점 C의 좌표는 $(1,2)$이므로

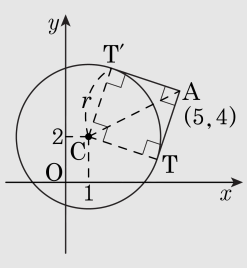
$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

점 A에서 원에 두 점선을 그었으므로 $\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{AT'}}$

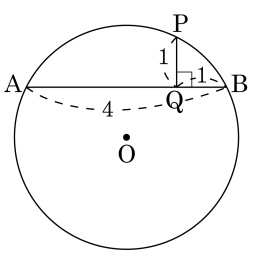
사각형 T′CTA는 네 각의 크기가 같고 네 변의 길이가 같은 정사각형이므로 $\angle\mathrm{CAT}=45°$

직각삼각형 CAT에서 $\overline{\mathrm{CT}}=r$이므로

$r=\overline{\mathrm{CA}}\sin 45°=2\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$



11. 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

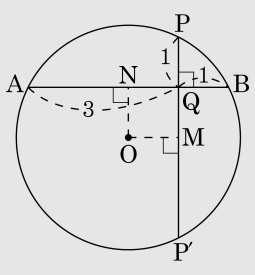


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의
연장선과 원 O 의 교점을
P′ 이라 하면
$\overline{P'Q}=3$ ($\because \overline{PQ}\cdot\overline{P'Q}=\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}$)
또, 원 O 의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린
수선의 발을 각각 N, M 이라 하면
원의 중심에서 현에 그은 수선은
현을 수직이등분하므로
$\overline{NB}=\overline{PM}=2$
따라서 $\overline{NQ}=\overline{QM}=1$ 이 되므로
□OMQN 은 정사각형이다.
$\therefore\ \overline{OM}=1,\ \overline{PM}=2$
그러므로 피타고라스의 정리에 의하여
$r=\overline{OP}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$
$r^2=5$



12. 다음 집합 중에서 무한집합이 아닌 것을 모두 구하면?

① $\{x \mid x$는 자연수 부분이 1인 대분수$\}$

② $\{x \mid x$는 3보다 작은 3의 배수$\}$

③ $\{x \mid 2 < x < 5$인 수$\}$

④ $\{x \mid 2 < x < 5$인 정수$\}$

⑤ $\{x \mid x = 4n - 5,\ n$은 자연수$\}$

해설

① $\left\{1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{2}{3}, \cdots\right\}$ ⇒ 무한집합

② $\varnothing$ ⇒ 유한집합

③ 무한집합

④ $\{3,\ 4\}$ ⇒ 유한집합

⑤ $\{-1,\ 3,\ 7,\ 11, \cdots\}$ ⇒ 무한집합

13. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$, $B = \{x \mid x$는 5 미만의 소수$\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $B = \{2,\ 3\}$
집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
부분집합의 개수는
$2^{6-2} = 2^4 = 16$ (개)

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여, 집합 $B = \{2, 4, 7\}$, $B \cap X \neq \phi$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

원소 개수가 n 개 인 집합의 부분집합 개수는 2^n 개 이다.
⇒ 집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$
먼저 $B \cap X = \phi$ 인 경우를 계산해 보면 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수, 즉 $2^3 = 8$ 이 된다. $\therefore B \cap X \neq \phi$ 인 부분집합 X 의 개수는 $32 - 8 = 24$(개)

15. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1,\ 2! = 2 \times 1,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x\text{는 자연수})\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

16. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　② $P - Q = \varnothing$　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$
$\therefore Q - P \neq \varnothing$

17. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2\geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert\geq\lvert x-y\rvert$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$
(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$
$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$
$=2(\lvert xy\rvert+xy)\geq 0$
$\therefore(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2\geq\lvert x-y\rvert^2$
(단, 등호는 $xy\leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때
$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로
$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

18. 두 점 A(−5, −2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, △ABP 의 무게중심 G 는 중심이 $(a,\ b)$ 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ −1 ⑤ 0

해설

P $=(\alpha,\ \beta)$ 라 하면,

$$\mathrm{G}=\left(\frac{-5+2+\alpha}{3},\ \frac{-2+5+\beta}{3}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{\alpha}{3},\ 1+\frac{\beta}{3}\right)$$

$-1+\frac{\alpha}{3}=p$, $1+\frac{\beta}{3}=q$ 라 하면,

$\alpha=3p+3$, $\beta=3q-3$, $\alpha^2+\beta^2=9$ 이므로

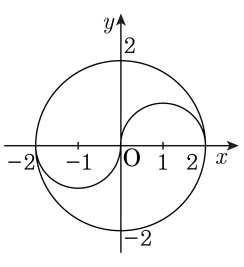
$\therefore\ (3p+3)^2+(3q-3)^2=9$

$\Rightarrow\ (p+1)^2+(q-1)^2=1$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

$\therefore\ a+b+c=1$

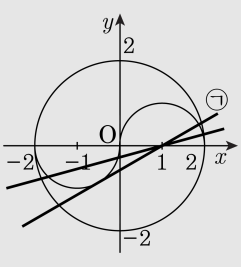
19. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y=a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



① $0<a<\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $0<a<\frac{2}{3}$ ④ $0<a<\frac{\sqrt{5}}{3}$
⑤ $0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y=a(x-1)$의 그래프는 실수 a의 값에
관계없이 항상 점 $(1,0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a>0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1,0)$과 직선 $y=a(x-1)$,
즉 $ax-y-a=0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}}=1, |2a|=\sqrt{a^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2=a^2+1, a^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

20. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 혜교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 혜교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0$, $0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1$, $1 \times 2 = 2$, $1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

21. 집합 $B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$의 부분집합의 열을 $B_1,\ B_2,\ B_3, \cdots, B_{16}$ 이라 하고, B_1의 원소의 총합을 a_1 , B_2의 원소의 총합을 $a_2, \cdots,\ B_{16}$의 원소의 총합을 a_{16}이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{16}$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

집합 $B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합의 개수는 모두 16개인데 실제로 나열해 보지 않고서도 해결할 수 있다.
즉, -1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
0 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개
2 를 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개이므로 원소의 총합은
$8(-1 + 0 + 1 + 2) = 16$

22. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \cdots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2} - 1$ (개)는 반드시 포함하지 않으므로

$2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)} = 64$ 이므로

$m - 2 - (\frac{m}{2} - 1) = 6$, $\frac{m}{2} - 1 = 6$,

$m = 14$

23. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : '나는 범인이 아니다.' B : 'D가 범인이다.' C : 'D는 거짓말을 했다.' D : 'C가 범인이다.'

① A와 B　② A와 D　③ B와 A
④ D와 A　⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
∴ *A* 가 범인이다.
2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

24. x, y는 양수이고 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{y}=3$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$x+y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{y}\right)(x+y)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\right)\geq\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(10+8)=6$$

25. 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 두 등식을 만족할 때, c값의 범위는?

$$a+b+c=5,\ \ b^2+c^2=11-a^2$$

① $-\frac{1}{2}\le c\le\frac{1}{2}$　② $-3\le c\le\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}\le c\le 3$
④ $1\le c\le\frac{3}{2}$　⑤ $1\le c\le\frac{5}{2}$

해설

$a+b=5-c,\quad a^2+b^2=11-c^2$을
코시-슈바르츠 부등식
$(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a+b)^2$에 대입하면
$2(11-c^2)\ge(5-c)^2$
$3c^2-10c+3\le 0,\ (3c-1)(c-3)\le 0$
$\therefore\ \frac{1}{3}\le c\le 3$