

1. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 6 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a - b$ 의 값은?

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\},$

$\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\},$

$\{4, 5\}, \{4, 6\},$

$\{5, 6\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (개)이다.

집합 A 의 부분집합 중 원소가 6 개인 집합은 자기 자신인 집합 A 뿐이다.

$a = 15, b = 1$ 이므로 $a - b = 14$

3. 두 집합 $A = \{1, 5, a\}$, $B = \{5, 7, b\}$ 이고 $A \subset B$ 일 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것을 골라라.

- $\textcircled{\tiny ㉠} \ a = 5$

$\textcircled{\tiny ㉡} \ b = 1$

$\textcircled{\tiny ㉢} \ B \subset A$

$\textcircled{\tiny ㉣} \ A = B$

$\textcircled{\tiny ㉤} \ a + b = 8$

▶ 답 :

▶ 정답 : $\textcircled{\tiny ㉠}$

해설

$A \subset B$ 조건을 만족하기 위해선 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 안에 포함되어야 하므로 $b = 1$ 이고,
 a 는 1, 5, 7 중 한 가지가 되어야하지만 이미 집합 A 에 1, 5 가 존재하므로 $a = 7$ 이 되어 $A = B$ 가 된다.
 $\textcircled{\tiny ㉠} \ a = 7$

4. 다음 중 명제 ‘어떤 실수의 제곱은 음수이다.’의 부정으로 옳은 것은?
- ① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
 - ② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
 - ③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
 - ④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
 - ⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

‘어떤’의 부정은 ‘모든’이고 ‘음수이다.’의 부정은 ‘음수가 아니다.’이다.
따라서, ‘어떤 실수의 제곱은 음수이다.’의 부정은 ‘모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.’이다.

5. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 '반드시 참이다'라고 말할 수 없는 명제는?

① $q \rightarrow r$

② $p \rightarrow r$

③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \quad \sim r \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow r \quad p \rightarrow q, q \rightarrow r$$

이므로

$$p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow \sim p$$

6. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

7. a, b 가 실수 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $|a| + |b| \geq |a + b|$

㉡ $|a + b| \geq |a - b|$

㉢ $|a - b| \geq |a| - |b|$

㉣ $|a + b| \geq |a| - |b|$

① ㉠

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ : $(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$2|a||b| \geq 2ab$ (참)

㉡ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \geq -2ab \Rightarrow$ 알수없다 (거짓)

㉢ : $|a - b|^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$-2ab \geq -2|a||b|$ ($\because |a||b| \geq ab$) (참)

㉣ : $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$||a| - |b||^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$

$2ab > -2|a||b|$ (참)

8. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10} \text{ 일 때, } r \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} &C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ &C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ &\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현 이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

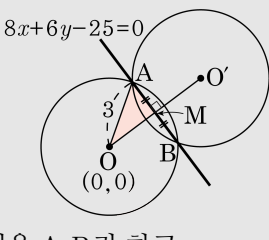
$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



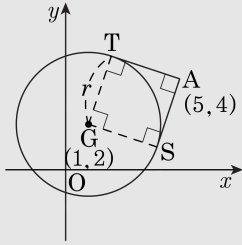
10. 좌표평면 위에 원 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(5,4)가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 원의 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

좌표평면 그림으로 나타내면 점 A에서 그은 접선이 서로 수직
이므로 원의 중심 G, 접점 S와 T, 점 A로 이루어지는 □GSAT
는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.

$$\therefore r = \frac{\overline{GA}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{10}$$



해설

중심을 C라 하고 두 접점을 각각 T, T'이라고 하면 점 C의
좌표는 (1, 2)이므로

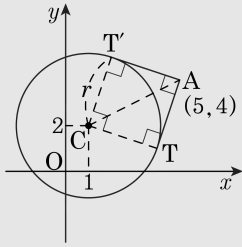
$$\overline{CA} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

점 A에서 원에 두 접선을 그었으므로 $\overline{AT} = \overline{AT'}$

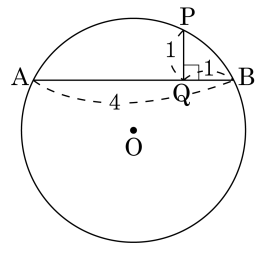
사각형 T'CTA는 네 각의 크기가 같고 네 변의 길이가 같은
정사각형이므로 $\angle CAT = 45^\circ$

직각삼각형 CAT에서 $\overline{CT} = r$ 이므로

$$r = \overline{CA} \sin 45^\circ = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$$



11. 다음 그림과 같이 한 원 O의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

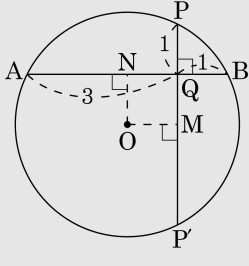


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의 연장선과 원 O의 교점을 P' 이라 하면
 $\overline{P'Q} = 3$ ($\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ}$)
 또, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면
 원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로
 $\overline{NB} = \overline{PM} = 2$
 따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로
 $\square OMQN$ 은 정사각형이다.
 $\therefore \overline{OM} = 1, \overline{PM} = 2$
 그러므로 피타고라스의 정리에 의하여
 $r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $r^2 = 5$



12. 다음 집합 중에서 무한집합이 아닌 것을 모두 구하면?

① $\{x \mid x \text{는 자연수 부분이 1인 대분수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 3보다 작은 3의 배수}\}$

③ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 수}\}$

④ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 정수}\}$

⑤ $\{x \mid x = 4n - 5, n \text{은 자연수}\}$

해설

① $\left\{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \dots\right\} \Rightarrow$ 무한집합

② $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합

③ 무한집합

④ $\{3, 4\} \Rightarrow$ 유한집합

⑤ $\{-1, 3, 7, 11, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

13. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 16 개

해설

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}, B = \{2, 3\}$$

집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
부분집합의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16 \text{ (개)}$$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여, 집합 $B = \{2, 4, 7\}$, $B \cap X \neq \emptyset$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 24개

해설

원소 개수가 n 개 인 집합의 부분집합 개수는 2^n 개 이다.

⇒ 집합 A의 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$

먼저 $B \cap X = \emptyset$ 인 경우를 계산해 보면 {1, 3, 5}의 부분집합의 개수, 즉 $2^3 = 8$ 이 된다. ∴ $B \cap X \neq \emptyset$ 인 부분집합 X 의 개수는 $32 - 8 = 24$ (개)

15. 자연수 n 에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n! \text{ (} n, x \text{는 자연수)}\}$ 에서 두 조건 p, q 가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 ‘ p 이고 $\sim q$ ’를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

‘ p 이고 $\sim q$ ’ $\Rightarrow P \cap Q^c = P - Q$
i) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5를 가져야 한다.
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
ii) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

16. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

17. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \supset} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$ 이다.

18. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 는 중심이 (a, b) 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ 0

해설

P = (α, β) 라 하면,

$$G = \left(\frac{-5+2+\alpha}{3}, \frac{-2+5+\beta}{3} \right)$$

$$= \left(-1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$$

$-1 + \frac{\alpha}{3} = p$, $1 + \frac{\beta}{3} = q$ 라 하면,

$\alpha = 3p + 3$, $\beta = 3q - 3$, $\alpha^2 + \beta^2 = 9$ 이므로

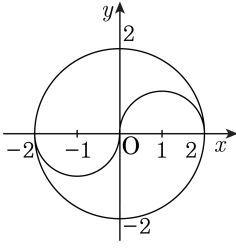
$$\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ 중심이 $(-1, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

$$\therefore a + b + c = 1$$

19. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x - 1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

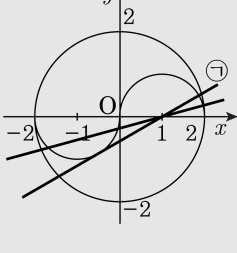


- ① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$
 ③ $0 < a < \frac{2}{3}$ ④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$
 ⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x - 1)$ 의 그래프는 실수 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x 축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$

직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,

점 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = a(x - 1)$,

즉 $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a - 0 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

20. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 해교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 해교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

21. 집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 열을 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{16}$ 이라 하고, B_1 의 원소의 총합을 a_1 , B_2 의 원소의 총합을 $a_2, \dots, B_{16}$ 의 원소의 총합을 a_{16} 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{16}$ 의 값은?

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는 모두 16개인데 실제로 나열해 보지 않고서도 해결할 수 있다.

즉, -1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

0 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

2 를 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개이므로 원소의 총합은 $8(-1 + 0 + 1 + 2) = 16$

22. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, \dots, 2^m\}$ 의 부분집합 중에서 1 과 2 는 반드시 포함하고, 2 를 제외한 짝수 번째 원소들은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1 과 2 는 반드시 포함하고 2 를 제외한 짝수 번째 원소들의 개수 $\frac{m}{2} - 1$ (개)는 반드시 포함하지 않으므로

$$2^{m-2-(\frac{m}{2}-1)} = 64 \text{ 이므로}$$

$$m - 2 - (\frac{m}{2} - 1) = 6, \frac{m}{2} - 1 = 6 ,$$

$$m = 14$$

23. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’
B : ‘D가 범인이다.’
C : ‘D는 거짓말을 했다.’
D : ‘C가 범인이다.’

- ① A와 B

② A와 D

③ B와 A

④ D와 A

⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
∴ A 가 범인이다.

2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

24. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x + y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) (x + y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8 \right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2 \sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) \\&= \frac{1}{3} (10 + 8) = 6\end{aligned}$$

25. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$

- ① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$

② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$
- ④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$

해설

$a + b = 5 - c, \quad a^2 + b^2 = 11 - c^2$ 을
코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에 대입하면
 $2(11 - c^2) \geq (5 - c)^2$
 $3c^2 - 10c + 3 \leq 0, (3c - 1)(c - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq c \leq 3$