

1. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

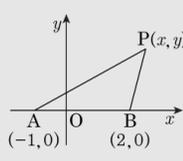
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



2. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x-1, y+3)$ 에 의하여 점 $(3, 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(2, 4)$

② $(4, 2)$

③ $(2, -4)$

④ $(-2, 4)$

⑤ $(4, -2)$

해설

f 는 x 축의 방향으로 -1 , y 축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1, 1+3) = (2, 4)$ 로 옮겨진다.

3. 점 (3, 4)를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계 없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

① (3, -4)

② (-3, 4)

③ (-3, -4)

④ (4, 3)

⑤ (3, 4)

해설

x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

4. 좌표평면 위의 점 $(-1, 3)$ 을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3, 5)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, 3), (3, 5)$ 의 중점이 (a, b) 이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

5. 다음은 집합이 아닌 것을 집합이 되도록 적절히 고친 것이다. 잘못 고친 것을 모두 골라라.

- ㉠ 큰 자연수의 모임
1보다
- ㉡ 우리 반에서 몸무게가 무거운 학생들의 모임
50 kg 이상인
- ㉢ 30에 가까운 수들의 모임
20
- ㉣ 세계에서 높은 산들의 모임
가장
- ㉤ 공부를 잘하는 학생들의 모임
못하는

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

▶ 정답 : ㉤

해설

㉢ 20 에 가까운 수들의 모임이라고 하더라도, 그 대상을 분명히 알 수가 없다.

예를 들어, '20 과의 거리가 2 이하인 수' 와 같이 분명한 기준이 있어야 한다.

㉤ 공부를 못하는 학생들의 모임이라고 하더라도 그 대상을 분명히 알 수가 없다.

예를 들어, '수학 점수가 30 점 이하인 학생' 과 같이 분명한 기준이 있어야 한다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은? (단, $U \neq \emptyset$)

① $A \cup B = B$

② $A \cap B = A$

③ $A - B = \emptyset$

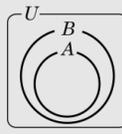
④ $B^c \subset A^c$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap B) = B$

해설

$A \subset B$ 이므로 ①, ②, ③, ④ : 참

⑤ : $(A \cup B) - (A \cap B) = B - A$



7. 집합 $A = \{x \mid |x-1| = 1\}$, $B = \{x \mid 2x-1 < 9\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset A \subset B$

해설

$|x-1| = 1, x-1 = \pm 1$ 이므로 $x = 0, 2$
 $\therefore A = \{0, 2\}$
 $B = \{x \mid 2x-1 < 9\} = \{x \mid 2x < 10\} = \{x \mid x < 5\}$
 $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$
 $\therefore A \subset C \subset B$

8. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
- ④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)
② : 대우는 ' nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.' nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.

∴ 주어진 명제는 참

④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$

※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.

⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

9. 다음 두 원이 접할 때, a 의 값이 될 수 있는 것은?

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2ax - 2y + 1 &= 0 \\x^2 + y^2 - 2x - 2ay + 1 &= 0\end{aligned}$$

- ① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2}-1$
④ $-1 + \sqrt{3}$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-1)^2 &= a^2, \\(x-1)^2 + (y-a)^2 &= a^2 \text{ 이므로,} \\ \text{두 원의 중심은 각각 } (a, 1), (1, a) \text{ 이고,} \\ \text{반지름은 둘 다 } a (\because a > 0) \text{ 이다.} \\ \sqrt{(a-1)^2 + (1-a)^2} &= 2a \\ \therefore 2(a-1)^2 &= 4a^2 \\ \therefore a^2 + 2a - 1 &= 0 \\ \therefore a &= -1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

10. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점(1, 0)을 지나는 원의 방정식을 바르게 구한 것은?

- ① $x^2+y^2-8x-y-4=0$
- ② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$
- ③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$
- ④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$
- ⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을 지나는 임의의 원 또는 직선의 방정식은 $(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다. 위 방정식이 나타내는 원이 점 (1,0)을 지나므로 $x=1, y=0$ 을 대입하면 $-3m+3=0$
 $\therefore m=1$
 $(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
 $2x^2+2y^2-10x-2y+8=0,$
 $x^2+y^2-5x-y+4=0$

11. 점 A(5,3), B(1,1) 을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

- ① $-12 < k < -2$ ② $-11 < k < -1$ ③ $-10 < k < 0$
 ④ $-9 < k < 1$ ⑤ $-8 < k < 3$

해설

두 점 A(5,3), B(1,1) 의 중점이 (3,2) 이므로 원의 중심의 좌표는(3,2)

점B와 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

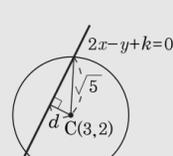
원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C(3,2)에서 직선 $2x - y + k = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$$|k+4| < 5, -5 < k+4 < 5$$

$$\therefore -9 < k < 1$$



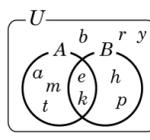
12. 다음 중 옳은 것은?

- ① $A = \{1, 3, 5\}$ 이면 $n(A) = 5$
- ② $A = \{x|x \text{ 는 } 6\text{의 약수}\}$ 이면 $n(A) = 6$
- ③ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = \{c\}$
- ④ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$
- ⑤ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3$

해설

- ① $n(A) = 3$
- ② $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로, $n(A) = 4$
- ③ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 3 - 2 = 1$
- ④ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 1$

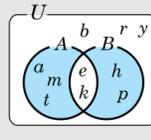
14. 아래 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?



- ① $A - B = \{a, t, m\}$
- ② $B - A = \{h, p\}$
- ③ $(A - B)^c = \{b, e, h, k, p, r, y\}$
- ④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, e, h, m, p, t\}$
- ⑤ $A - B^c = \{e, k\}$

해설

④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, h, m, p, t\}$



16. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
 q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
 q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
 r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
 $s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
 $\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

17. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

- ① $|a| + |b| \geq |a + b|$
- ② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$
- ③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ($a > 0, b > 0, c > 0$)
- ④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$
- ⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned} \frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b+b^2-2a-a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2-a^2+2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{에서} \end{aligned}$$

$(a+2)(b+2) > 0$ 이고

$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0$ 이므로

$(\because a \geq b > 0)$

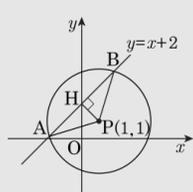
$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

18. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서
 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

19. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $O(0, 0)$ 인 원 밖의 한 점 $P(11, 12)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px + qy = 100$ 일 때, $p + q$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

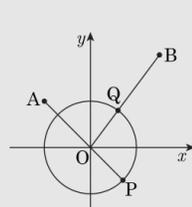
원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 100$, $a_2x + b_2y = 100$ 이고
두 직선은 동시에 $P(11, 12)$ 를 지나므로
 $11a_1 + 12b_1 = 100$, $11a_2 + 12b_2 = 100$ 이 함께 성립한다.
이것은 $11x + 12y = 100$ 위에 두 점 $Q_1(a_1, b_1)$,
 $Q_2(a_2, b_2)$ 가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 Q_1, Q_2 의 방정식은
 $11x + 12y = 100$ 이다.
따라서 $p = 11$, $q = 12 \quad \therefore p + q = 23$

20. 두 점 A(-2, 2), B(3, 4) 가 있다. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 임의의 두 점을 P, Q 라 할 때, \overline{AP} 의 최댓값과 \overline{BQ} 의 최솟값의 합은 ?

- ① 3 ② $2 + 2\sqrt{2}$ ③ $5 + 2\sqrt{2}$
 ④ $4 + 2\sqrt{2}$ ⑤ 7

해설

그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 \overline{AP} 는 최댓가되고 \overline{BQ} 는 최소가 된다.
 $\therefore \overline{AP}$ = 반지름의 길이 + 원의 중심과 A 까지의 거리
 $= 2 + \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = 2 + 2\sqrt{2}$
 \overline{BQ} = 원의 중심과 B 까지의 거리 - 반지름의 길이
 $= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} - 2$
 $= 5 - 2 = 3$
 \therefore 구하는 답은 $(2 + 2\sqrt{2}) + 3 = 5 + 2\sqrt{2}$



21. 직선 $y = 3x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동 한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접할 때, a^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 직선

$$: y = 3(x - a) \Rightarrow 3x - y - 3a = 0$$

원에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = 3$$

$$a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore a^2 = 10$$

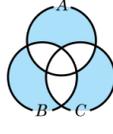
22. 직선 $y = kx + 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
 $y = -kx - 1 \dots \text{㉠}$
이제 원의 방정식을 정리하면,
 $(x + 3) + (y - 2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
 $2 = 3k - 1 \Rightarrow k = 1$

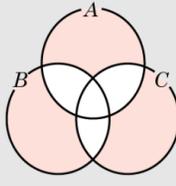
24. 1에서 100까지의 자연수 중에서 $A = \{x|x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수는?



- ① 48 개 ② 67 개 ③ 75 개
 ④ 77 개 ⑤ 85 개

해설

색칠한 부분에 속하는 원소의 개수는
 $n(A) + n(B) + n(C) - 2 \times n(A \cap B) - 2 \times n(B \cap C) - 2 \times n(C \cap A) + 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 이다.



$n(A) = 50, n(B) = 33, n(C) = 20$, $A \cap B = \{x|x \text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 16$
 $B \cap C = \{x|x \text{는 } 15\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(B \cap C) = 6$, $C \cap A = \{x|x \text{는 } 10\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(C \cap A) = 10$
 $A \cap B \cap C = \{x|x \text{는 } 30\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = 3$
 따라서 $50 + 33 + 20 - 2 \times 16 - 2 \times 6 - 2 \times 10 + 3 \times 3 = 48$ 이다.

