1. 부등식 $x^2+x+m \geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4　② 0　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$x^2+x+m \geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=1^2-4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$
따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

2. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ 9)$, $\mathrm{C}(-4,\ \mathrm{a})$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{3-9}{2-(-1)}=-2$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 : $\dfrac{a-3}{(-4)-(2)}$ $\therefore\ a=15$

3. 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,
$a=b^2+1\cdots\cdots$ ㉠
$l=\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}}\cdots$ ㉡
㉠를 ㉡에 대입하면
$$l=\frac{|b^2-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$
$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.
따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$이므로
$\therefore\ 4(a+b)=7$

4. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$　　② $m > -2$　　③ $-2 < m < 2$

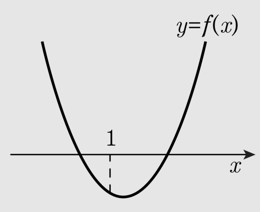
④ $m > 2$　　⑤ $m > 5$

해설

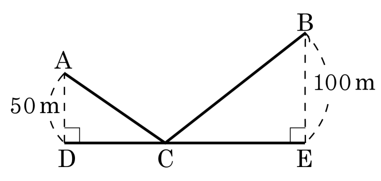
$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$



5. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,m$, $100\,m$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,m$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라.

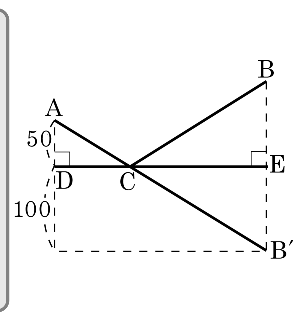


▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 250 m

해설

B를 $\overline{DE}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면
$\overline{BC}=\overline{CB'}$이므로
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$
따라서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값은
$\overline{AB'}=\sqrt{200^2+150^2}=250(m)$



6. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 P(x, y)라 하면

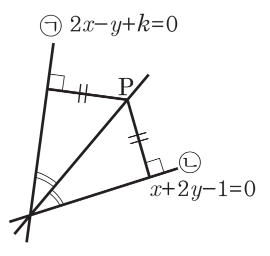
$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$x^2 + y^2$

$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

7. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2　　② 4　　③ -6

④ 8　　⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \quad \cdots$ ㉡

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

8. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2}<k<0$　② $1<k<\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$
④ $-2<k<-\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{2}<k<1$

해설

ⅰ) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠ $\times 3-$ ㉡ $-$ ㉢에서
$4x=-2k^2-k+3$
$=-(2k+3)(k-1)>0 \cdots$ ㉣
㉡ $\times 3-$ ㉢ $-$ ㉠에서
$4y=-2k^2+3k-1$
$=-(2k-1)(k-1)>0 \cdots$ ㉤
㉢ $\times 3-$ ㉠ $-$ ㉡에서
$4z=6k^2-k-1$
$=(3k+1)(2k-1)>0 \cdots$ ㉥

ⅱ) ㉣ 에서 $-\frac{3}{2}<k<1$

㉤에서 $\frac{1}{2}<k<1$

㉥에서 $k<-\frac{1}{3}, k>\frac{1}{2}$

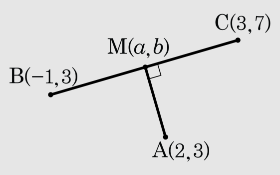
이들의 공통부분은 $\frac{1}{2}<k<1$

9. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\frac{7-3}{3-(-1)} \times \frac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$, $\quad \therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \frac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

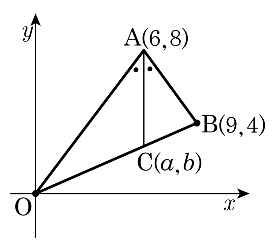
이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 9$

10. 다음 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(6, 8), B(9, 4)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$AOB가 있다. $\angle$A 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 C(a, b) 라 할 때, ab 의 값은?



① 12　　② 14　　③ 15

④ 16　　⑤ 18

해설

$\angle$OAC = $\angle$BAC 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$가 성립한다.
이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$
$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2+(4-8)^2} = 5$ 이므로
점 C 는 $\overline{OB}$ 를 10 : 5 ,
즉 2 : 1 로 내분하는 점이다.
따라서 점 C 의 좌표는
$C\left(\frac{2\times9+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right)$
$\therefore\ C\left(6,\ \frac{8}{3}\right)\quad \therefore\ ab = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$