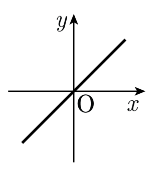
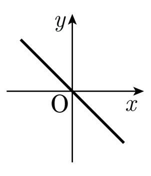
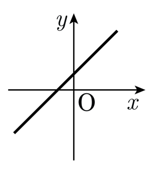
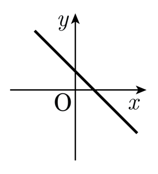
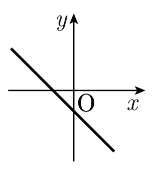
1. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z = x + yi$를 점 (x, y)로 나타낼 때, 점 (x, y)는 어떤 도형 위를 움직이는가 ? (단, x, y는 실수)

①


②


③


④


⑤


해설

$$(3+2i)(x+yi) = 3x + 3yi + 2xi - 2y$$
$$= (3x-2y) + (2x+3y)i$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

2. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$
$\quad =(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$
순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$
$\therefore\ x=-2$

3. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$　② $a(a-1)$　③ $a^2(a-1)$
④ $a^2(1-a)^2$　⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a > 0$, $a-1 < 0$, $1-a > 0$, $-a < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$
$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$
$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}i \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}i$
$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$
$= -a(1-a) = a(a-1)$

4. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① 0, ± 1　　② 0, ± 2　　③ ±1, ± 2

④ ±2, ± 3　　⑤ ±3, ± 4

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서
$x \geq 0$ 일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$ 일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = \pm 2,\ x = \pm 3$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

6. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 2 ④ -2 ⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2-(a^2+ka-2k+b)=0$

$-ka+2k-b=0$

$k(2-a)-b=0$

$\therefore \quad a=2 \quad b=0 \quad a+b=2$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $\alpha = p$ 이것을 ㉡에 대입하면
$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots\cdots$ ㉢
한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$
$\therefore\ 9p^2 - 16q - 8 > 0$
위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q + 9) - 16p - 8 > 0$
$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$

8. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2,\ k>1$ ② $k<-2$ ③ $k>0$

④ $k>2$ ⑤ $k<2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{1}{2-k}<0$

$\therefore\ 2-k<0$

$\therefore\ 2<k$

9. 이차함수 $y = 2(x+1)(2x-3)$ 의 최솟값은?

① $-\frac{25}{4}$　② $-\frac{27}{4}$　③ $-\frac{21}{5}$　④ $-\frac{23}{5}$　⑤ $-\frac{25}{7}$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)(2x-3) \\ &= 2(2x^2 - x - 3) \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 6 \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

10. 합이 26 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 13

해설

두 수를 각각 x , $26 - x$ 라고 하면,

$y = x(26 - x)$

$= -x^2 + 26x$

$= -(x - 13)^2 + 169$

$x = 13$ 일 때, 최댓값 169를 가진다.

$26 - x = 13$ 이므로 구하는 두 수는 13, 13이다.

11. x, y가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$
따라서 $x = -2,\ y = 3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

12. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답: ________ m

▷ 정답: 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t-3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

13. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

14. x에 대한 삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3-ax^2+5x-b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\beta+\left(1-\sqrt{2}\right)\beta=5$

$-1+2\beta=5,\ 2\beta=6 \quad \therefore\ \beta=3$

따라서, $a=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+3=5$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3=-3$이므로

$a+b=5+(-3)=2$

15. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

16. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a, b 는 실수) 일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2, \quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

17. $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005}+\bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1=\sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3=1,\ \ \bar{z}^3=1$

$$\begin{aligned} z^{2005}+\bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668}\cdot z+(\bar{z}^3)^{668}\cdot \bar{z} \\ &= z+\bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$

18. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$

$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

19. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10　② -12　③ -14　④ -16　⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2 - 9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$\therefore a = -1$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$b = 2,\ c = 8$ 이다.

$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$

20. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0 을 가진다.

21. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

22. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　　② 65　　③ 68　　④ 72　　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \cdots \quad$ ①

$\therefore \; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

①에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \; 21b + 44 = 65$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1\ge 0$

$2a^2-4a-1\le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\le a\le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

24. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

① $x = 2,\ y = 4$ ② $x = 4,\ y = 2$ ③ $x = -1,\ y = 2$

④ $x = 2,\ y = -1$ ⑤ $x = -2,\ y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4} \geq 0$ 에서

$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$

$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$

$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$

$6(y-2)^2 \leq 0 \qquad \therefore y = 2$ ($\because$ y 는 실수)

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2 - 16x + 32 = 0,\quad 2(x-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 4$

25. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 α, 방정식 $x^3=2$의 한 허근을 β라고 할 때, $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)p(x)$를 만족시키는 다항식 $p(x)$에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$의 값은?

① α ② $\alpha\beta$ ③ α^2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$\beta^3=2,\ (\alpha\beta)^3=\alpha^3\beta^3=2,$
$(\alpha^2\beta)^3=(\alpha^3)^2\cdot\beta^3=2$이므로
방정식 $x^3=2$의 근은 $\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta$이다.
따라서 $x^3-2=(x-\beta)(x-\alpha\beta)(x-\alpha^2\beta)$
$\therefore\ p(x)=x-\alpha^2\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ p(\alpha^5\beta)&=\alpha^5\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^3\cdot\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=\alpha^2\beta-\alpha^2\beta\\&=0\end{aligned}$$