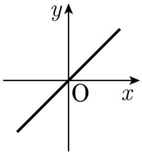
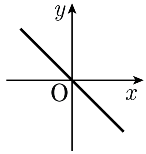
1. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, $x,\ y$는 실수)

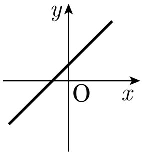
①



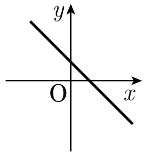
②



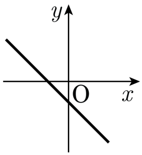
③



④



⑤



해설

$$(3+2i)(x+yi) = 3x+3yi+2xi-2y$$
$$= (3x-2y)+(2x+3y)i$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\frac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

2. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$$
$$=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

3. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$ ② $a(a-1)$ ③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$ ⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a > 0$, $a-1 < 0$, $1-a > 0$, $-a < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$

$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$

$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}i \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}i$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$

$= -a(1-a) = a(a-1)$

4. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \ \pm 1$　② $0, \ \pm 2$　③ $\pm 1, \ \pm 2$

④ $\pm 2, \ \pm 3$　⑤ $\pm 3, \ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서
$x \geq 0$일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = \pm 2, \ x = \pm 3$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서

$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$\therefore\ p=-4$

$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$\therefore\ q=1$

$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

6. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 2 ④ -2 ⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$

$-ka + 2k - b = 0$

$k(2-a) - b = 0$

$\therefore \quad a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2-3px+4q+2=0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+2\alpha=3p\cdots\cdots$㉠
$\alpha\cdot 3\alpha=4q+2\cdots\cdots$㉡
㉠에서 $\alpha=p$ 이것을 ㉡에 대입하면
$2p^2=4q+2 \quad \therefore p^2=2q+1\cdots\cdots$㉢
한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D=(-3p)^2-4(4q+2)>0$
$\therefore\ 9p^2-16q-8>0$
위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q+9)-16p-8>0$
$2q+1>0 \quad \therefore q>-\frac{1}{2}$

8. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2,\ k>1$ ② $k<-2$ ③ $k>0$

④ $k>2$ ⑤ $k<2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$\alpha\beta<0$이므로 $\dfrac{1}{2-k}<0$

$\therefore\ 2-k<0$

$\therefore\ 2<k$

9. 이차함수 $y = 2(x+1)(2x-3)$ 의 최솟값은?

① $-\frac{25}{4}$ ② $-\frac{27}{4}$ ③ $-\frac{21}{5}$ ④ $-\frac{23}{5}$ ⑤ $-\frac{25}{7}$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)(2x-3) \\ &= 2(2x^2 - x - 3) \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 6 \\ &= 4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

10. 합이 26 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 13

해설

두 수를 각각 x , $26-x$ 라고 하면,

$$
\begin{aligned}
y &= x(26-x) \\
&= -x^2+26x \\
&= -(x-13)^2+169
\end{aligned}
$$

$x=13$ 일 때, 최댓값 169를 가진다.

$26-x=13$이므로 구하는 두 수는 13, 13이다.

11. x, y가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$
따라서 $x = -2,\ y = 3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

12. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t-3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

13. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

14. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\beta + \left(1 - \sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

15. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

16. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a,b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i,$

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

17. $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　② -1　　③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1　　⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3 = 1,\ \ \bar{z}^3 = 1$

$$\begin{aligned} z^{2005}+\bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668}\cdot z + (\bar{z}^3)^{668}\cdot \bar{z} \\ &= z+\bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$

18. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$

$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면

$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ 이고

준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

19. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2,\ c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

20. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a-2)^2$
따라서 m은 $a = 2$일 때 최댓값 0을 가진다.

21. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면
$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$
x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$
$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$
$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3
따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

22. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60 ② 65 ③ 68 ④ 72 ⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \ 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

① 에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \ 21b + 44 = 65$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1 \ge 0$

$2a^2-4a-1 \le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

24. 방정식 $2x^2-4xy+5y^2-8x-4y+20=0$ 을 만족하는 실수 x, y의 값은?

① $x=2,\ y=4$ ② $x=4,\ y=2$ ③ $x=-1,\ y=2$

④ $x=2,\ y=-1$ ⑤ $x=-2,\ y=1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$2x^2-4(y+2)x+5y^2-4y+20=0\cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$에서

$4(y+2)^2-10y^2+8y-40\geq 0$

$6y^2-24y+24\leq 0$

$6(y^2-4y+4)\leq 0$

$6(y-2)^2\leq 0$ $\therefore y=2$ ($\because$ y 는 실수)

$y=2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2-16x+32=0,\ \ 2(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$

25. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 α, 방정식 $x^3 = 2$의 한 허근을 β라고 할 때, $x^3 - 2 = (x-\beta)(x-\alpha\beta)p(x)$를 만족시키는 다항식 $p(x)$에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$의 값은?

① α ② $\alpha\beta$ ③ α^2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$\beta^3 = 2,\ (\alpha\beta)^3 = \alpha^3\beta^3 = 2,$

$(\alpha^2\beta)^3 = (\alpha^3)^2 \cdot \beta^3 = 2$이므로

방정식 $x^3 = 2$의 근은 $\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta$이다.

따라서 $x^3 - 2 = (x-\beta)(x-\alpha\beta)(x-\alpha^2\beta)$

$\therefore\ p(x) = x - \alpha^2\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ p(\alpha^5\beta) &= \alpha^5\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^3 \cdot \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= 0\end{aligned}$$