1. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(x-a)+1}+2+b \\ &= \sqrt{2x-2a+1}+2+b \end{aligned}$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a = 2,\ -2a+1 = b,\ 2+b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c = -2$

2. $-1 < a < 3$일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{a^2+2a+1}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{a^2-6a+9}$$

① a ② $a-2$ ③ 4

④ $3a+2$ ⑤ $a+2$

해설

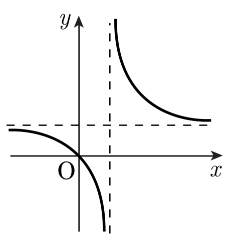
$\sqrt{(a+1)^2}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{(a-3)^2}$

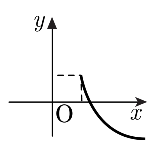
$=|a+1|+(a-2)+|a-3|$

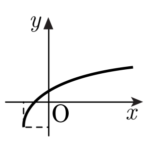
$=(a+1)+(a-2)-(a-3)$

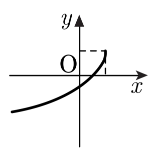
$=a+1-2+3=a+2$

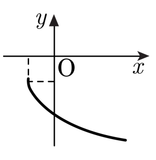
3. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

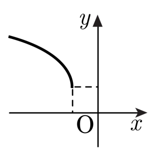


①


②


③


④


⑤


해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

4. 함수 $y = 1 - \sqrt{2 - x}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 2\}$ 이다.

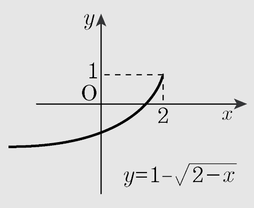
② 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$ 이다.

③ 그래프는 점 $(-2,\ -1)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

해설



① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1, 3, 4사분면을 지난다.

5. $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$ ② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$
④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$$\frac{x}{x+\sqrt{x-1}} + \frac{x}{x-\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\left\{(x-\sqrt{x-1}) + (x+\sqrt{x-1})\right\}x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2-x+1}$$

$x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x-1 = \sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=5$

$\therefore\ x^2 = x+1$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{2x^2}{x^2-x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)-x+1} = x+1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}+1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

6. $x = 2 + \sqrt{3}$일 때, $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$의 값은?

① $11 + 5\sqrt{3}$ ② $11 + 10\sqrt{3}$ ③ $22 + 5\sqrt{3}$
④ $22 + 10\sqrt{3}$ ⑤ $22 + 15\sqrt{3}$

해설

$x = 2 + \sqrt{3}$에서 $x - 2 = \sqrt{3}$
양변을 제곱하면
$x^2 - 4x + 4 = 3$ $\therefore$ $x^2 - 4x + 1 = 0$
$x^3 - 2x^2 + 3x + 4$
$= (x+2)(x^2 - 4x + 1) + 10x + 2$
$= 10x + 2$
$= 10(2 + \sqrt{3}) + 2$
$= 22 + 10\sqrt{3}$

7. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2$ 에 대하여 $(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$ 의 값을 구하면?

① -1　② $-\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$$
$$= (g \circ (g^{-1} \circ f) \circ g)(4)$$
$$= ((g \circ g^{-1}) \circ f \circ g)(4)$$
$$= (f \circ g)(4)$$

이때, $g(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 2 = 2$ 이므로

구하는 값은 $f(g(4)) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

8. $0 < a < 1$ 이고 $x = a - \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2}$ 를 a 로 나타내면?

① $2a$　② $\frac{2}{a}$　③ $-\frac{2}{a}$　④ $-2a$　⑤ 0

해설

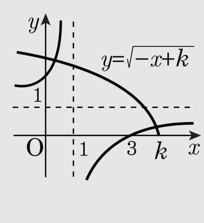
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4} - \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} - \left|a-\frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right) + \left(a-\frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

9. 함수 $y = \dfrac{x-3}{x-1}$과 $y = \sqrt{-x+k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

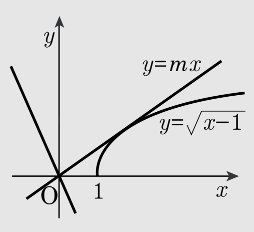
$k \geq 3$이어야 하므로 k의 최솟값은 3이다.

10. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

① $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ② $0 \leq m < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ ⑤ $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

해설



$y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고
또 $y = mx$ 는 원점을 지나는 직선이다.
다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는
$mx = \sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.
즉 $m^2x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$D = 1 - 4m^2 = 0, \therefore\ m = \frac{1}{2} (\because\ m > 0)$
또한 $m = 0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 $(1,\ 0)$ 에서 만난다.
따라서 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만나기 위한 m 의 값의 범위는
$\therefore 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$