1. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.

② $x+y=10$ 이다.

③ $|-3|=-3$

④ $x=2$ 일 때, $x-1>0$

⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참

따라서 명제는 ①, ③, ④

2. 다음 중 명제가 아닌 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 무궁화 꽃은 아름답다.
② 한국의 수도는 서울이다.
③ $1+2<5$
④ $x+1=4$
⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④ $x=3$인 경우는 참이지만 $x\neq 3$인 경우는 거짓이다. 따라서 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

3. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 북한산은 아름답다.

② 미국의 수도는 뉴욕이다.

③ 거짓말은 나쁘다.

④ 우리나라의 미래는 청소년에게 달렸다.

⑤ 세계에서 가장 긴 강은 나일강이다.

해설

② 거짓, ⑤ 참

따라서 명제는 ②, ⑤ 이다.

4. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $2 < \sqrt{6} \leq 3$

② 2는 소수가 아니다.

③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$

④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$

⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

5. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$　　② $P \cap Q = \varnothing$　　③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

④ $P \cap Q^c = Q^c$　　⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \rightarrow q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함관계를 본다.

$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.

$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$

$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

6. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$

② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$

③ $x=1,\ y=1$

④ $x=2,\ y=4$

⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

7. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$ ② $\sim q \rightarrow p$ ③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$

$\therefore q \rightarrow \sim p$

8. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$의 부정은 $1 \leq x \leq 2$이다.

9. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)

$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)

$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)

$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)

$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)

따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

10. 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2-6x+8=0 \iff (x-2)(x-4)=0 \iff x=2$ 또는 $x=4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

11. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a\leqq 1$ 그리고 $b\leqq 1$이면 $a+b\leqq 2$ (참)

12. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

13. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$
② $Q^c \subset P$
③ $P \subset Q^c$
④ $P \cup Q = P$
⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

14. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P^c$ ③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$ ⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$\therefore \mathrm{Q}^c \subset \mathrm{P}^c$

15. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

16. 명제 'x 가 소수이면 x 는 홀수이다.' 는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

17. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$ ⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

18. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　② $q \to p$　③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

19. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$ ② $p \rightarrow q$ ③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'

$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$(참)

$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$(참)

20. x, y, z 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$

② x, y, z 는 서로 다르다.

③ $x\neq y$ 이고 $y\neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x)>0$

⑤ x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$
즉, x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

21. 「모든 중학생은 고등학교에 진학한다」의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 중학생이 아니면 고등학교에 진학하지 않는다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

22. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \leq 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \geq 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \leq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \geq x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

23. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.

② 두 자연수 m, n 에 대하여 m^2+n^2 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.

⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m=2$, $n=1$ 인 경우

24. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$)
q : $x<-3$ 또는 $x>1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

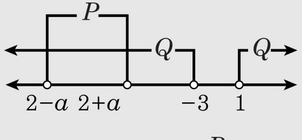
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$ $P=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ $\cdots$ ㉡,

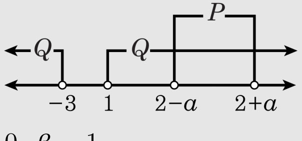
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$

그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0<a\leq 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=1$

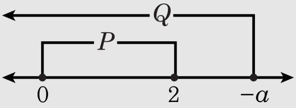
25. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

26. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로

$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

27. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2-a^2x+2\neq 0$ 이면 $x\neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x=1$ 이면 $ax^2-a^2x+2=0$ 이다.' 가 참이므로
$a-a^2+2=0,\ a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$
$a>0$이므로 $a=2$

28. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 보기에서 반드시 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $p \rightarrow r$	㉡ $r \rightarrow p$	㉢ $p \rightarrow \sim r$
㉣ $q \rightarrow \sim r$	㉤ $r \rightarrow \sim p$	

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고, 또한 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우명제인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참 $\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$

즉, $p \rightarrow \sim r$, $q \rightarrow \sim r$ 가 참이고 또한 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이므로 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 ㉢, ㉣, ㉤이 참이다.

29. 세 명제 $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $R \subset Q^c$ ③ $R \cup P^c = R$

④ $P \subset R$ ⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로

$\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.

① $P \not\subset Q$

② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$

③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$

④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$

⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

30. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!$ (n, x는 자연수)$\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p 이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

31. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \to q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

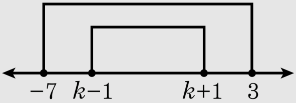
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \to q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \;\therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \;\therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$

32. 두 조건 p, q가 p : $|x| < a$, q : $|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$

④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

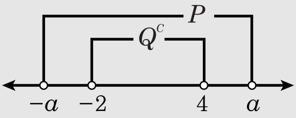
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P = \{x | -a < x < a\}$

$Q = \{x | x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

33. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$ ② $p \Rightarrow \sim r$ ③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$ ⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$