

1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

2. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $C(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{a^2 + 4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $C\left(-\frac{a}{2}, 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2}$

$\therefore a = -2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

3. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r = \overline{OA} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

4. 세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 외접원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$
② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$
③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$
④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이

세 점 $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(0, -3)$ 을 지나므로 차례로 대입하면

$$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = -2, C = -15$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

5. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$
이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$
즉 $a^2 - a - 6 < 0$
 $\therefore -2 < a < 3$

6. 점 $(2, 1)$, $(4, -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

- ① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면
 y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
 $r = |a|$ 이다.
 $\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$
 $\textcircled{\text{A}}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
 $\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$
 $\textcircled{\text{A}}$ 이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로
 $(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
 $b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{\text{C}}$
 $\textcircled{\text{B}} \times 2 - \textcircled{\text{C}}$ 에서 $b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$
 $\therefore b = -1, 7$
이때, $\textcircled{\text{B}}$ 에서 $b = -1$ 이면 $a = 2, b = 7$ 이면 $a = 10$
 $\therefore r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

7. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)
- ① $0 < a < 3$
- ② $3 < a < 7$
- ③ $a > 7$
- ④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$
- ⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 \geq q + 2$$

$$d = 5 > a +$$

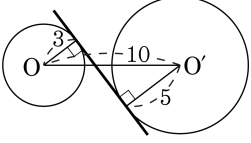
$\therefore 0 < a < 3$
 $(\because)$ 이 함수의 두 근의 곱은 a 에 의해 결정된다.

(ii) 한 원이 다

$$d = 5 < |a - 2|$$
$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

8. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

9. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

10. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여

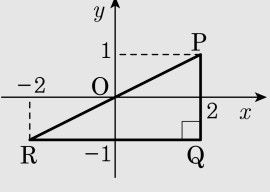
대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을

꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



11. $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$ 이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π

② 3π

③ 4π

④ 5π

⑤ 6π

해설

$$\text{준식} = x^2 + 2ax + y^2 - 4ay + 4a^2 + 2a - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+a)^2 + (y-2a)^2 = a^2 - 2a + 4$$

그러므로 준식은 중심 $(-a, 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2 - 2a + 4}$ 이다.

$$\therefore \text{면적 } S = \pi(\sqrt{a^2 - 2a + 4})^2$$

$$= \pi(a^2 - 2a + 4) = \pi(a-1)^2 + 3\pi$$

$\therefore a = 1$ 일 때 최소 면적 : 3π

12. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

13. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{ 개}$$

14. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

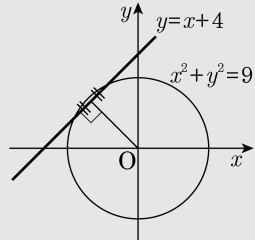
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

15. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

16. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

17. 점 $(3, 1)$ 에서 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x - y = 2$, $ax + by = 10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 12

해설

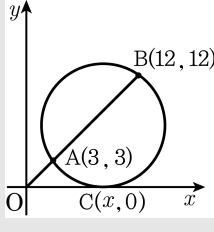
점 $(3, 1)$ 을 지나므로 $3a + b = 10 \dots \textcircled{1}$
원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로
 $\frac{|-10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}, \quad a^2 + b^2 = 50 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면,
 $a^2 + (10 - 3a)^2 = 50$
 $10a^2 - 60a + 50 = 0$
 $a^2 - 6a + 5 = 0$
 $\therefore a = 1, 5$
 $\therefore a = 5, b = -5$ 또는 $a = 1, b = 7$
한 접선의 방정식이 $x - y = 2$ 이므로,
 $a = 1, b = 7$
 $\therefore ab = 7$

18. 좌표평면 위의 두 점 (3, 3), (12, 12) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{3}{2}$
- ② 6
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $6\sqrt{2}$
- ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

19. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

- ① $\frac{\pi}{2}$
- ② π
- ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면
$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$
$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$
이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로
$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$
$$\textcircled{\text{㉠}}\text{을 } \textcircled{\text{㉡}}\text{에 대입하면}$$
$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$
$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$
따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는
 $2\pi \doteq 2\pi$

20. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

21. 점 $(0, 2)$ 를 점 $(1, 0)$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $ax+y+b=0$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 으로 평행이동될 때, 상수 a, b 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하여라.

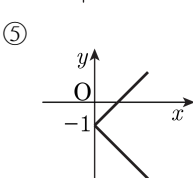
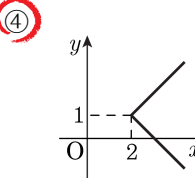
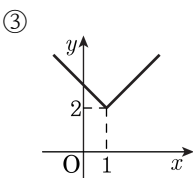
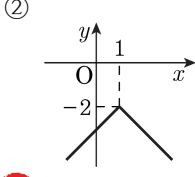
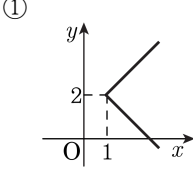
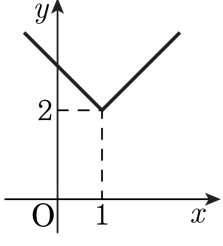
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 $(0, 2)$ 를 점 $(1, 0)$ 으로 옮기는 평행이동은
 $(x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$
이때, 직선 $ax+y+b=0$ 을
 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
 $a(x-1)+(y+2)+b=0$
 $ax+y+b-a+2=0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 과 같아야 하므로
 $a=2, b-a+2=3$ 에서 $b=3$
 $\therefore 2a-b=4-3=1$

22. 방정식 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y,x) = 0$ 이 나타내는 도형은?



해설

도형 $f(x,y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y,x) = 0$ 이 된다.
 따라서 (1, 2) 는 (2, 1) 로 이동되며,
 도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

23. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 3$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

해설

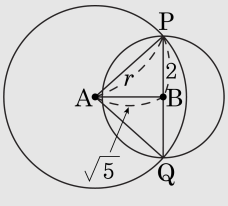
평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

24. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 의 교점을 P, Q 라할 때, 선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
라고 하면
 $\overline{PQ}$ 가 원 B의 지름일 때
 $\overline{PQ}$ 의 길이는 최대가 된다.
 $\therefore r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$



25. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최소값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$x_1^2 + y_1^2 = 8$ 이고

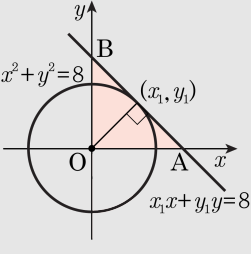
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



26. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $k = -\sqrt{2} + 1$
- ② $k = \sqrt{2} + 1$
- ③ $k = \sqrt{2} - 1$
- ④ $k = 2\sqrt{2} + 1$
- ⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로
두 접선 중 하나는 x 축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)
따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$
이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로
$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

 $\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$
 $b > 1$ 이므로 $b - 1 = \sqrt{2}$
 $\therefore b = \sqrt{2} + 1$
따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고
점 $(k, 0)$ 을 지나므로
 $0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$

27. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P 가 점 $A(6, 5)$ 에서 출발하여 어떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

- ㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다.

㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

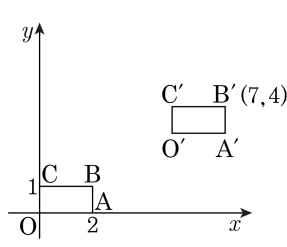
㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6, 5) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 4)$
 $\therefore 5$ 회 이동한다.

28. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $O \rightarrow O', A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B' 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A'C' 의 방정식은?



- ① $x + 2y - 10 = 0$
 ② $x + 2y - 13 = 0$
- ③ $x + 2y - 16 = 0$
 ④ $2x + 3y - 17 = 0$
- ⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2,1) 이 점 B'(7,4) 로 옮겨지므로
 직사각형 O'A'B'C' 은 직사각형 OABC 를
 x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
 따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 A'(7,3), C'(5,4) 로 옮겨
 지므로

직선 A'C' 의 방정식은 $y - 3 = \frac{4 - 3}{5 - 7}(x - 7)$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

$\therefore x + 2y - 13 = 0$

해설

직선 A'C' 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로

직선 A'C' 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\frac{1}{2}$ 이다.

한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$ 에서 점 A' 의 좌표는 (7,3) 이므로

이것을 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 에 대입하여 정리하면 $b = \frac{13}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선 A'C' 의 방정식은

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2},$

$\therefore x + 2y - 13 = 0$

29. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - 4, y + 1)$ 에 의하여 옮긴 후 다시 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -5 ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$$(0, 0) \xrightarrow{f} (-4, 1) \xrightarrow{y=-3\text{대칭}} (-4, -7)$$

$$\therefore \text{이동된 원의 방정식} : (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 1$$

$$\Rightarrow a + b + r = -10$$

30. 좌표평면에서 점 $P(1, 4)$ 를 다음 평행이동식 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$Q = (1 + m, 4 + n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{PQ}$ 의 기울기는 $y = 2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2}, \frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y = 2x$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \text{i) } \frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } \frac{8+n}{2} = m+2$$

$$\text{i) 과 ii) 를 연립하면, } m = \frac{8}{5}, n = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore m + n = \frac{4}{5}$$

31. 중심이 $C(4, 3)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

- ① $4x + 3y = 25$
 ② $4x + 3y = 21$
 ③ $3x + 4y = 16$
- ④ $3x + 4y = 25$
 ⑤ $3x + 4y = 21$

해설

구하고자 하는 직선 $y = ax + b$ 는 원점과 원의 중심인 $(4, 3)$ 을 잇는 직선에 대해서 수직이므로,

$$a \times \frac{3}{4} = -1$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + b, 4x + 3y - 3b = 0$$

직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R 이라 하면

$\triangle OCQ$ 와 $\triangle OQR$ 은 서로 닮음이므로,

$$5 : \sqrt{21} = \sqrt{21} : x$$

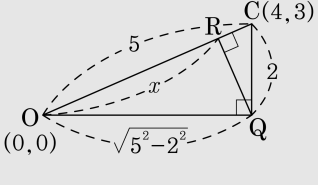
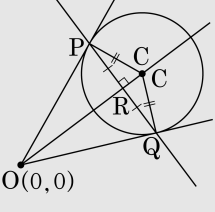
$$\therefore x = \frac{21}{5}$$

직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{21}{5}$$

$|3b| = 21, b > 0$ 이므로 $3b = 21$

$$\therefore 4x + 3y = 21$$



32. 원 $O : x^2 + y^2 = 1$, $O' : (x - 4)^2 + y^2 = 4$ 와 직선 $l : \sqrt{3}x - y + 4 = 0$, 점 $A(2, \sqrt{5})$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 원 O 위의 한 점에서 직선 l 에 이르는 거리의 최솟값은 1 이다.
- ㉡ 점 A 와 원 O' 위의 한 점 까지의 거리의 최댓값은 5 이다.
- ㉢ 두 원 O 와 O' 의 공통외접선의 길이를 α , 공통내접선의 길이를 β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 22 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

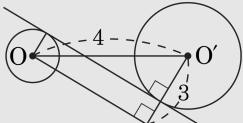
㉠. 최솟값은 원 중심에서 l 까지 거리에서 원 반지름을 뺀 값과 같다

$$\Rightarrow \frac{|4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} - 1 = 1 \text{ (참)}$$

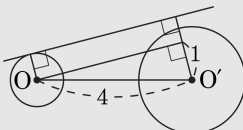
㉡. 최댓값은 $O'A$ 길이에 반지름을 합한 값과 같다.

$$\Rightarrow \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} + 2 = 5 \text{ (참)}$$

㉢. 내접선 : $B = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

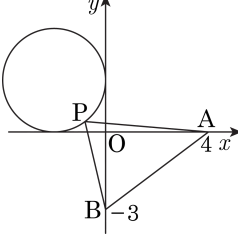


$$\text{외접선 : } A = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$



$$\therefore A^2 + B^2 = 22 \text{ (참)}$$

33. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, -3)$ 으로 이루어지는 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 구하시오.

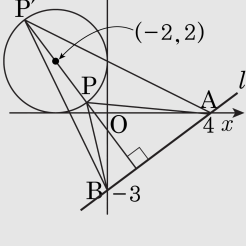


▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원 위의 한 점 P' 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 $\triangle ABP'$ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다. 마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선



직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 $\triangle ABP$ 의 높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다.

원의 중심 $(-2, 2)$ 에서 A, B 를 지나는 직선

$l: 3x - 4y - 12 = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|-6 - 8 - 12|}{5} = \frac{26}{5}$$

$d + r$ 일 때 최대거리, $d - r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M = \left(\frac{26}{5} + 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 18 \quad (\because \overline{AB} = 5) \\ m = \left(\frac{26}{5} - 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\therefore M + m = 26$$