1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$

② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$

④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{\mathrm{PA}})^2=(x-2)^2+y^2$

$(\overline{\mathrm{PB}})^2=x^2+(y-2)^2$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

2. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y = 0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\frac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a = -2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

3. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$ ② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$ ④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로

$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=\mathrm{r}$$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

4. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$ 을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots ㉠$

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots ㉡$

$9-3B+C=0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-6, B=-2, C=-15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

5. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(x+a)^2 + (y-2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$

이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$

즉 $a^2 - a - 6 < 0$

$\therefore\ -2 < a < 3$

6. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2,\ b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

7. 두 원 $x^2+y^2=a^2$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$가 만나지 않을 조건은? (단, $a>0$)

① $0<a<3$

② $3<a<7$

③ $a>7$

④ $0<a<3$ 또는 $a>7$

⑤ $2<a<7$ 또는 $a>7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로

두 원의 중심거리 d는 $d=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$d=5>a+2$

$\therefore\ 0<a<3$

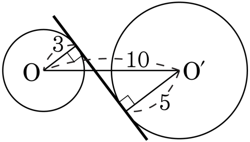
(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$d=5<|a-2|$

$\therefore a>7\ (\because\ a>0)$

(i), (ii) 에서 $0<a<3$ 또는 $a>7$

8. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2-(3+5)^2}=6$

9. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

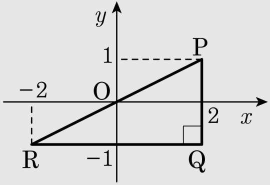
10. 점 P $(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P$(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q$(2, -1)$
또, 점 P$(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R$(-2, -1)$
따라서, 다음 그림에서 세 점 P$(2, 1)$, Q$(2, -1)$, R$(-2, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$



11. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은 ?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

12. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$

교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$

의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로

$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$

$\therefore m=-2$

이 값을 대입하고 정리하면

$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.

$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$

그러므로 $A+B-C=10$

13. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \therefore 19$ 개

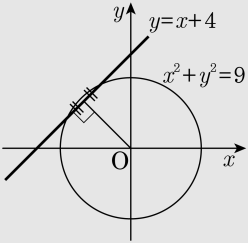
14. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$ 이므로 $\dfrac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

15. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

16. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$

$|a - 1| = 10$

$a - 1 = \pm 10$

$a > 0$ 이므로 $a = 11$

17. 점 (3, 1) 에서 $x^2+y^2=2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x-y=2$, $ax+by=10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 12

해설

점 (3, 1) 을 지나므로 $3a+b=10 \quad \cdots$ ㉠

원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}, \quad a^2+b^2=50 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면,

$a^2+(10-3a)^2=50$

$10a^2-60a+50=0$

$a^2-6a+5=0$

$\therefore \ a=1, \ 5$

$\therefore \ a=5, \ b=-5$ 또는 $a=1, \ b=7$

한 접선의 방정식이 $x-y=2$ 이므로,

$a=1, \ b=7$

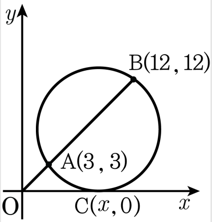
$\therefore \ ab=7$

18. 좌표평면 위의 두 점 $(3,\ 3)$, $(12,\ 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

19. 점 $A(2,4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ $\dfrac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a,b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x,y)$라 하면

$$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a=2(x-1),\ b=2(y-2) \qquad \cdots ㉠$$

이 때 $P(a,b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2-4a-2b+1=0 \qquad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$$

$$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$$

$$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)=1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \doteq 2\pi$

20. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c , d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

21. 점 $(0,\ 2)$ 를 점 $(1,\ 0)$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $ax+y+b=0$ 이 직선 $2x+y+3=0$ 으로 평행이동될 때, 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $2a-b$ 의 값을 구하여라.

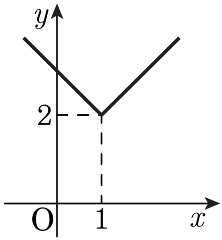
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

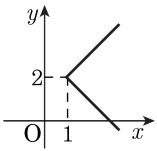
해설

점 $(0,\ 2)$ 를 점 $(1,\ 0)$ 으로 옮기는 평행이동은
$(x,\ y) \rightarrow (x+1,\ y-2)$
이때, 직선 $ax+y+b=0$ 을
x 축의 방향으로 1만큼,
y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$a(x-1)+(y+2)+b=0$
$ax+y+b-a+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 직선 $2x+y+3=0$ 과 같아야 하므로
$a=2,\ b-a+2=3$ 에서 $b=3$
$\therefore\ 2a-b=4-3=1$

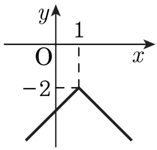
22. 방정식 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형은?



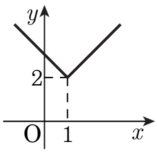
①



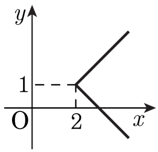
②



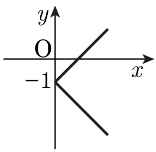
③



④



⑤



해설

도형 $f(x,y)=0$ 을 $y=x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y,x)=0$ 이 된다.

따라서 $(1,\ 2)$ 는 $(2,\ 1)$ 로 이동되며,

도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

23. 다음 중 원 $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$

④ $(x+1)^2+y^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=16$

해설

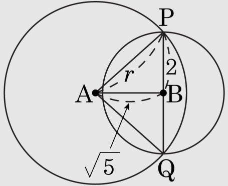
평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4 인 ⑤이다.

24. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 교점을 P, Q라할 때, 선분 PQ의 길이를 최대로 하는 양수 r 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$A : x^2 + y^2 = r^2, B : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
라고 하면
$\overline{PQ}$가 원 B 의 지름일 때
$\overline{PQ}$의 길이는 최대가 된다.
$\therefore \quad r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$

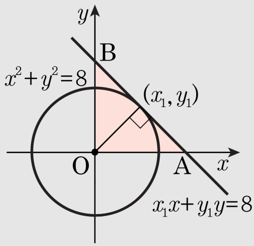


25. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8$ ⋯⋯ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \dfrac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

26. $(k,\ 0)$ 에서 $x^2+y^2-2y=0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$ ② $k=\sqrt{2}+1$ ③ $k=\sqrt{2}-1$

④ $k=2\sqrt{2}+1$ ⑤ $k=\sqrt{2}+2$

해설

$x^2+y^2-2y=0$ 에서 $x^2+(y-1)^2=1$ 이므로
두 접선 중 하나는 x축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$
$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$
$\therefore b=\sqrt{2}+1$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로
$0=-k+\sqrt{2}+1 \qquad \therefore k=\sqrt{2}+1$

27. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 A$(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

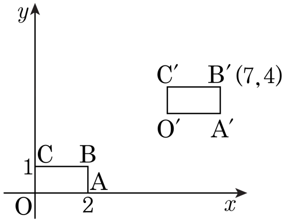
① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

28. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OC}}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $\mathrm{O} \to \mathrm{O}', \mathrm{A} \to \mathrm{A}', \mathrm{B} \to \mathrm{B}', \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′ 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A′C′ 의 방정식은?



① $x+2y-10=0$

② $x+2y-13=0$

③ $x+2y-16=0$

④ $2x+3y-17=0$

⑤ $2x+3y-19=0$

해설

점 B(2,1) 이 점 B′(7,4) 로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′ 은 직사각형 OABC 를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 A′(7,3), C′(5,4) 로 옮겨지므로

직선 A′C′ 의 방정식은 $y-3=\dfrac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}$

$\therefore\ x+2y-13=0$

해설

직선 A′C′ 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로

직선 A′C′ 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\dfrac{1}{2}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=1$ 에서 점 A′ 의 좌표는 (7,3) 이므로

이것을 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 에 대입하여 정리하면 $b=\dfrac{13}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선 A′C′ 의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{2}$,

$\therefore\ x+2y-13=0$

29. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x-4, y+1)$ 에 의하여 옮긴 후 다시 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -5 ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$(0,\ 0) \xrightarrow{f} (-4,\ 1) \xrightarrow{y=-3\text{대칭}} (-4,\ -7)$

$\therefore$ 이동된 원의 방정식 :$(x+4)^2 + (y+7)^2 = 1$

$\Rightarrow\ a+b+r = -10$

30. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5}$, $n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$

31. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

① $4x+3y=25$ ② $4x+3y=21$ ③ $3x+4y=16$

④ $3x+4y=25$ ⑤ $3x+4y=21$

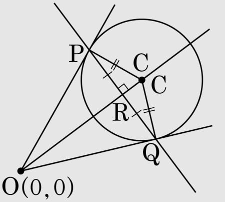
해설

구하고자 하는 직선
$y=ax+b$ 는 원점과
원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서
수직이므로,

$a\times\frac{3}{4}=-1$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

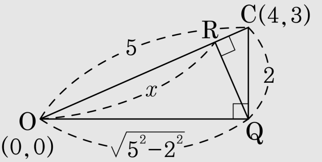
$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+b,\ 4x+3y-3b=0$



직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R
이라 하면
$\triangle$OCQ 와 $\triangle$OQR 은 서로 닮음이
므로,

$5\ :\ \sqrt{21}=\sqrt{21}\ :\ x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$



직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{21}{5}$$

$|3b|=21,\ b>0$ 이므로 $3b=21$

$\therefore\ 4x+3y=21$

32. 원 O : $x^2+y^2=1$, O′ : $(x-4)^2+y^2=4$ 와 직선 l : $\sqrt{3}x-y+4=0$, 점 A$(2, \sqrt{5})$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 원 O 위의 한 점에서 직선 l 에 이르는 거리의 최솟값은 1 이다.

㉡ 점 A 와 원 O′ 위의 한 점 까지의 거리의 최댓값은 5 이다.

㉢ 두 원 O 와 O′ 의 공통외접선의 길이를 α, 공통내접선의 길이를 β 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은 22 이다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

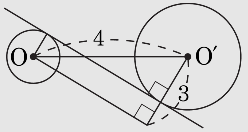
㉠. 최솟값은 원 중심에서 l 까지 거리에서 원 반지름을 뺀 값과 같다

$$\Rightarrow \quad \frac{|4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}-1=1 \text{ (참)}$$

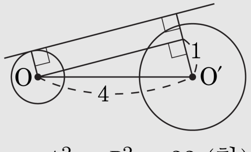
㉡. 최댓값은 $\overline{\mathrm{O'A}}$ 길이에 반지름을 합한 값과 같다.

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}+2=5 \text{ (참)}$$

㉢. 내접선 : $B=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

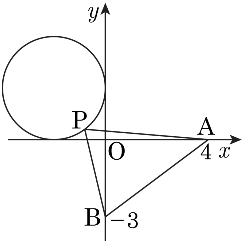


외접선 : $A=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



$\therefore \quad A^2+B^2=22$ (참)

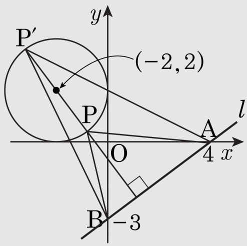
33. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ -3)$ 으로 이루어지는 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설



원 위의 한 점 P′ 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 $\triangle ABP'$ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다.
마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선
직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 $\triangle ABP$ 의
높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다.
원의 중심 $(-2,\ 2)$ 에서 A, B 를 지나는 직선 $l : 3x-4y-12=0$ 에 이르는 거리는

$$d=\frac{|-6-8-12|}{5}=\frac{26}{5}$$

$d+r$ 일 때 최대거리, $d-r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M=\left(\frac{26}{5}+2\right)\times\overline{AB}\times\frac{1}{2}=18 \quad (\because\ \overline{AB}=5) \\ m=\left(\frac{26}{5}-2\right)\times\overline{AB}\times\frac{1}{2}=8 \end{cases}$$

$\therefore\ M+m=26$