

2. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{여기서}\end{aligned}$$

$(a+2)(b+2) > 0$ 이고

$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0$ 이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

3. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

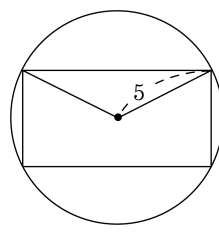
$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

4. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
 가로와 세로의 길이를 a , b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

5. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)
- ① $p : a > 3, q : a^2 > 9$
 - ② $p : a^2 = ab, q : a = b$
 - ③ $p : |a| < |b|, q : a < b$
 - ④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 = -2$
 - ⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

- ① 충분조건
- ③ 아무런 조건관계가 아니다.
- ④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1, 3\}, Q = \emptyset$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
- ⑤ 필요충분조건

6. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 진리집합이 각각 $P = \{x \mid x \leq -2, 1 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x \mid x \leq a\}$, $R = \{x \mid x \leq b\}$ 이다. p 는 q 이기 위한 필요조건이고, r 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a, b 에 대한 a 의 최댓값을 M , b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건, r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P \subset R$ 이 성립한다.

따라서 $a \leq -2, b \geq 5$ 이므로 a 의 최댓값은 -2 , b 의 최솟값은 5

$\therefore -2 + 5 = 3$

7. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이라면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$

② $q \Rightarrow r$

③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$

⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$$r \Rightarrow \sim q \text{ 이므로 } q \Rightarrow \sim r$$

$$\sim p \Rightarrow q \text{ 이고 } q \Rightarrow \sim r \text{ 이므로 삼단논법에 의하여 } \sim p \Rightarrow \sim r$$

$$\therefore r \Rightarrow p$$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

8. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \ominus} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \ominus}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \ominus} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}$ 이다.

9. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- I. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$
II. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2$
IV. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 4$
VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 25$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- I. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
 $= a^2 > 0 \quad (\because a > 0)$
 $\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a} \quad (\bigcirc)$
II. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
 $= 2(a+b) - (a+b+2\sqrt{ab})$
 $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
 $\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\bigcirc)$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \quad (\bigcirc)$
IV. $\frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$
 $\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\bigcirc)$
V. $(a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) = 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}} = 4$
 $\therefore 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 8 \quad (\times)$
VI. $(2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}} = 8$
 $\therefore (2a+b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 25 \quad (\bigcirc)$

10. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

11. x, y 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요충분 조건인 것은?

- ① $p : x + y \geq 4, q : x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$
- ② $p : x + y$ 는 유리수, $q : x, y$ 는 모두 유리수
- ③ $p : xy > x + y > 4, q : x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p : |x| > |y|, q : x > y$

해설

- ① 충분조건
- ② 필요조건
- ③ 필요조건
- ⑤ 아무 조건 아님

12. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + 5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a, b 에서 $a + b$ 의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

해설

$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + 5b \geq 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + 5b) \leq 0$$

정리하면 $(20 - a)y + 25 - 5b \leq 0 \cdots \text{㉠}$

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$$20 - a = 0, \quad 5b - 25 \geq 0$$

$$\therefore a = 20, \quad b \geq 5$$

$$\therefore a + b \geq 25$$

13. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가),(나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
 이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
 그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
 곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
 또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$

② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
 또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$

14. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,
 $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

15. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

- ① a^2
- ② b^2
- ③ $\sqrt{a^2 + b^2}$
- ④ $a^2 + b^2$
- ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x + y)^2$ 은 항상 성립하므로
 $a^2 + b^2 \geq (x + y)^2 \dots\dots ①$
 $\therefore x + y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$
①의 등호가 성립할 조건은
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이고 $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$
또, ③의 등호는 $x + y \geq 0$ 일 때, 성립하므로
③을 풀면
 $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이고,
 $x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.