1. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore \ p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

2. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a|+|b| \geq |a+b|$

② $a \geq b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \geq \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc(a>0, b>0, c>0)$

④ $\sqrt{3}+\sqrt{13} > \sqrt{2}+\sqrt{14}$

⑤ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

해설

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b}=\frac{2b+b^2-2a-a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{b^2-a^2+2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$=\frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2)>0$이고

$(b-a) \leq 0$, $a+b+2>0$이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

3. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

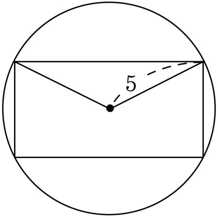
해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

4. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면
$a^2+b^2=100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$
$\therefore 200 \ge (a+b)^2$ $\therefore a+b \le 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
$2(a+b)=20\sqrt{2}$

5. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\},\ Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

6. 세 조건 p, q, r를 만족하는 진리집합이 각각 $P = \{x \mid x \leq -2, 1 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x \mid x \leq a\}$, $R = \{x \mid x \leq b\}$이다. p는 q이기 위한 필요조건이고, r이기 위한 충분조건이 되도록 상수a, b에 대한 a의 최댓값을 M, b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

p 가q 이기 위한 필요조건, r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P \subset R$ 이 성립한다.
따라서 $a \leq -2, b \geq 5$ 이므로 a 의 최댓값은 -2, b 의 최솟값은 5
$\therefore -2 + 5 = 3$

7. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　② $q \Rightarrow r$　③ $p \Rightarrow r$

④ $\sim q \Rightarrow p$　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$\therefore\ r \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

8. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x > -1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$= \lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$= 2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert = 1, \lvert 2-(-3)\rvert = 5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

9. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1+a> \sqrt{1+2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
Ⅲ. $a+\frac{1}{a} \geq 2$
Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right) \geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 25$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2$
$=a^2>0\ (\because a>0)$

$\therefore (1+a)>\sqrt{1+2a}$ (○)
Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (○)

Ⅲ. $a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}=2$ (○)

Ⅳ. $\frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
$=\frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$
$\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (○)

Ⅴ. $(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}}=4$

$\therefore 4+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a} \geq 8$ (×)

Ⅵ $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$

$\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}}=8$

$\therefore (2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a} \geq 25$ (○)

10. $x > 2$ 일 때, $x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$에서 $x - 2 > 0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$x + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2$$
$$= 2 + 2 = 4$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

11. x, y가 실수일 때, 다음 중 조건 p가 조건 q의 필요충분 조건인 것은?

① $p : x + y \geq 4$, $q : x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$

② $p : x + y$는 유리수, $q : x$, y는 모두 유리수

③ $p : xy > x + y > 4$, $q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy + 1 > x + y > 2$, $q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : |x| > |y|$, $q : x > y$

해설

① 충분조건
② 필요조건
③ 필요조건
⑤ 아무 조건 아님

12. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + 5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a, b에서 $a+b$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

해설

$x^2 + 2(2y+5)x + 4y^2 + ay + 5b \geq 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$$\frac{D}{4} = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + 5b) \leq 0$$

정리하면 $(20-a)y + 25 - 5b \leq 0 \cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$20 - a = 0, \ 5b - 25 \geq 0$

$\therefore \ a = 20, \ b \geq 5$

$\therefore \ a + b \geq 25$

13. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 a, b, c에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times \boxed{(가)}$이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$

14. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2+$ ㉡하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\leq -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

15. a, b가 양의 상수이고, x, y가 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 만족하면서 변할 때, $x+y$의 최댓값은?

① a^2　　② b^2　　③ $\sqrt{a^2+b^2}$

④ a^2+b^2　　⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \geq (x+y)^2$ 은 항상 성립하므로

$a^2+b^2 \geq (x+y)^2 \cdots\cdots$ ①

$\therefore x+y \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots$ ②

①의 등호가 성립할 조건은

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이고 $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2} \cdots\cdots$ ③

또, ③의 등호는 $x+y \geq 0$ 일 때, 성립하므로

③을 풀면

$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이고,

$x+y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.