

1. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 2, 5 를 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, n 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

집합 A 의 원소의 개수는 n 개 이므로 원소 2, 5 를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n-2} = 32 = 2^5 \quad \therefore n = 7$$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = A$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B = B$

② $B \subset A$

③ $(A \cap B) \subset A$

④ $(A \cup B) \subset A$

⑤ $A \cup (A \cap B) = B$

해설

$A \cup B = A$ 일 때, $B \subset A$ 이다.

⑤ $A \cup (A \cap B) = A \cup B = A$

3. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim p \rightarrow r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \rightarrow \sim p$

② $\sim r \rightarrow p$

③ $q \rightarrow r$

④ $\sim r \rightarrow \sim q$

⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 대우

$\frac{q \rightarrow \sim p^{(1)}}{\text{㉠}}$ 도 참이다.

$\frac{\sim p \rightarrow r}{\text{㉡}}$ 가 참이면 대우 $\sim r \rightarrow p^{(2)}$ 도 참이다.

㉠, ㉡에서 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이고 $\sim p \rightarrow r$ 가 참이므로 $q \rightarrow r^{(3)}$ 도 참이다.

또한, $q \rightarrow r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim q^{(4)}$ 도 참이다.
따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

4. 다음 중에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것을 고르면?

① $p : a = b, q : ac = bc$

② $p : a > b, q : a^2 > b^2$

③ $p : A \subset (B \cap C), q : A \subset (B \cup C)$

④ $p : x + y = 1, q : x = 2, y = -1$

⑤ $p : |x - 1| < 1, q : |x| < 1$

해설

$q \rightarrow p$ 가 참. 즉, 주어진 명제의 역이 참인 것을 찾는다.

① 충분조건 반례 : $c = 0, a = 1, b = 2$

② 충분조건 반례 : $a = -2, b = -1$

③ 합집합에 포함된다 하여 교집합에 포함된다고 할 수 없다.

$(B \cap C) \subset (B \cup C)$ 이므로 $p \rightarrow q$ (충분조건)

④ 역 : $x = 2, y = -1$ 이면 $x + y = 1$ 이다.(참)

⑤ $|x - 1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2, |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ 이므로 $q \nRightarrow p$

5. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) $1 \in A$

(나) $a \in A$ 이면 $\sqrt{2}a \in A$

이 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 집합 A 는 유한집합이다.

㉡ 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 가장 작은 수는 1 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이므로 조건 (나)에 의하여

$$\sqrt{2} \in A, (\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^3 \in A, \dots,$$

즉, $(\sqrt{2})^n$ (n 은 자연수) 꼴로 나타나는 수는 모두 집합 A 의 원소이므로 A 는 무한집합이다.

㉡ ㉠에서 $(\sqrt{2})^2 \in A, (\sqrt{2})^4 \in A, (\sqrt{2})^6 \in A, \dots,$

즉 $2 \in A, 2^2 \in A, 2^3 \in A, \dots$ 이므로 임의의 자연수 n 에 대하여 $2^n \in A$ 이다.

㉢ (반례)

집합 $A = \{0, 1, \sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, \dots\}$ 은 주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족하지만 원소 중 가장 작은 수는 0 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉡뿐이다.

6. 두 집합 $A = \{a - 1, a + 2, 8\}$, $B = \{3, 6, b\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

해설

$A = B$ 이므로

$a - 1 = 3$ 에서 $a = 4$, $b = 8$

$\therefore a + b = 12$

7. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$ 에 대하여 $A \cap (B \cup C)$ 를 원소 나열법으로 옳게 나타낸 것은?

① $\{2, 4\}$

② $\{4, 10\}$

③ $\{2, 3, 4\}$

④ $\{2, 4, 10\}$

⑤ $\{2, 4, 6, 10\}$

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 9, 10\}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10\} \\ &= \{2, 4, 10\} \end{aligned}$$

8. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $A - B^c = A \cap B$

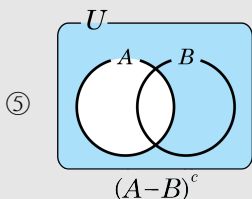
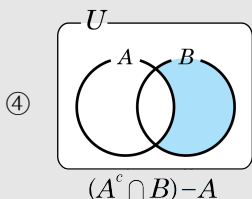
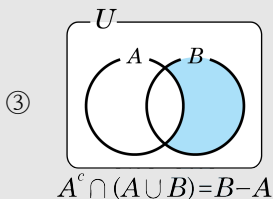
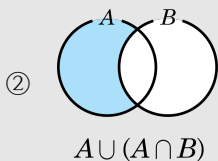
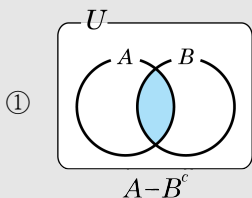
② $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$

③ $A^c \cap (A \cup B) = A - B$

④ $(A^c \cap B) - A = B \cap A^c$

⑤ $(A - B)^c = A^c \cup B$

해설



9. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 12, n(B) = 10, n(C) = 9, n(A \cap B) = 4, n(B \cup C) = 15, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

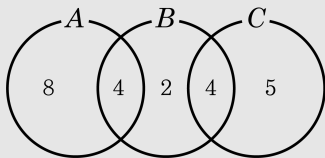
해설

$n(B) = 10, n(C) = 9, n(B \cup C) = 15$ 이므로

$$n(B \cap C) = 10 + 9 - 15 = 4$$

$A \cap C = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램을 그려보면 $\therefore n(A \cup B \cup C) =$

$$8 + 4 + 2 + 4 + 5 = 23$$



10. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

① $r \rightarrow p$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면

$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참

$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참

$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

11. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

(1) $B \subset A$

(2) B 의 원소의 개수는 3개 이하이다.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.

원소가 0개인 부분집합 : $\emptyset$

원소가 1개인 부분집합 :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{12\}$$

원소가 2개인 부분집합 :

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 12\},$$

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 12\}, \{3, 4\},$$

$$\{3, 6\}, \{3, 12\}, \{4, 6\}, \{4, 12\}, \{6, 12\}$$

원소가 3개인 부분집합 :

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 12\},$$

$$\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 12\}, \{1, 4, 6\},$$

$$\{1, 4, 12\}, \{1, 6, 12\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\},$$

$$\{2, 3, 12\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 6, 12\},$$

$$\{3, 4, 6\}, \{3, 4, 12\}, \{3, 6, 12\}, \{4, 6, 12\}$$

12. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

(가) 집합 X 는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.

(나) $n(X) \leq 5$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 112 개

해설

전체집합 U 의 부분집합의 개수는

$$2^7 = 128 \text{ (개)}$$

이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는

$$2^{7-4} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

따라서 (가)를 만족하는 집합 X 의 개수는

$$128 - 8 = 120 \text{ (개)}$$

이때, $n(X) = 6$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $\dots$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 7개로 이들은 모두 조건 (가)를 만족한다.

또 $n(X) = 7$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 1개로 이것도 역시 조건 (가)를 만족한다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $120 - (7 + 1) = 112 \text{ (개)}$

13. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\}$ 에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ 가 성립하는 자연수 n 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$A_1 = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$$

$$A_n = \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\}$$

$$\therefore 2n-1 \leq 6 \Rightarrow n \leq \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 3

해설

$$A_1 = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}, A_2 = \{x \mid 3 \leq x \leq 11\}, A_3 = \{x \mid 5 \leq x \leq 16\}, A_4 = \{x \mid 7 \leq x \leq 21\} \text{ 이상에서 } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$$

$\therefore n$ 의 최댓값은 3

14. 집합 $A_k = \{x | x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A_2 \cap A_4 \cap A_{16} = A_{16}$

② $A_3 \cup A_6 \cup A_9 = A_3$

③ $A_4 \cup A_{12} = A_4$

④ $A_6 \cup A_{12} = A_6$

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_9$

해설

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_{18}$

15. 다음의 I, II에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

I. $p : ab < 0$

q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이 동시에 성립한다.

II. $p : a + b - 1 < 0$

q : 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖는다.

a, b 가 실수일 때, I, II에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

I. q 의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는

$$a - b > 0 \text{ 이고 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0 \text{ 에서 } ab < 0 \text{ 이고}$$

$a > b$ 이므로

$$a > 0, b < 0$$

역으로, $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이고

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0, b < 0$ 이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0, b > 0)$ 또는 $(a > 0, b < 0)$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

II. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$ 이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$$D = a^2 + 4b < 0, P = \{(a, b) | a + b - 1 < 0\}$$

$Q = \{(a, b) | a^2 + 4b < 0\}$ 라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$

따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.

