1. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$

$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$

$= 13 + 12 = 25$

$\therefore (3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 25$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

2. 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,

$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

3. $x \geq 0$, $y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

4. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

5. $x>0, y>0$ 일 때, $\left(3x+\dfrac{2}{y}\right)\left(y+\dfrac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times4=32$

6. $a,\ b$가 양수일 때, $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$

$a,\ b$가 양수이므로, $ab>0$

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$$

7. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \dfrac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

8. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

9. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

10. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

11. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$　② $16\,\mathrm{m}^2$　③ $25\,\mathrm{m}^2$　④ $36\,\mathrm{m}^2$　⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

12. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$$y=\frac{1}{4}(5-3x)$$

$$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$$

$$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$$

13. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

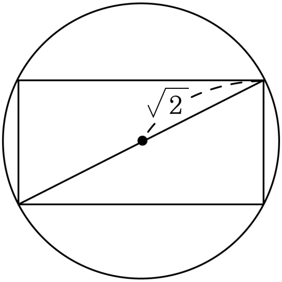
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

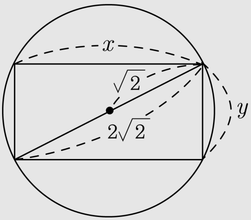
$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

15. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, △OBC의 최소 넓이는?

① 3　② 3.5　③ 4　④ 4.5　⑤ 5

해설

B$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이므로

△OBC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$㉠

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$

$\therefore\ S\geq 4$

16. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$

(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)

㉠, ㉡을 대입하면

$2(6-x^2) \geq (4-x)^2$, $3x^2-8x+4 \leq 0$

$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \dfrac{2}{3} \leq x \leq 2$

따라서 $M=2$, $m=\dfrac{2}{3}$이므로 $\dfrac{M}{m}=3$

17. 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \dfrac{16}{2a+b}$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값$= 7$

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$a^2 + b + \dfrac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \dfrac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a-1)^2 + (2a + b + \dfrac{16}{2a+b}) \quad \cdots \quad ①$

$2a + b + \dfrac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\dfrac{16}{2a+b})} = 8$ 에서

등호는 $2a + b = \dfrac{16}{2a+b}$ 일 때 성립하고

이때, $2a + b = 4$ (a, b는양수) $\cdots$ ②

①에서 최소는 $a = 1$ 일 때이다.

$\therefore$ ②에서 $a = 1, b = 2$ 일 때 최솟값 : 7