

1. 다음 중 집합이 아닌 것은?

- ① 5의 배수의 모임
- ② 15보다 큰 14의 약수의 모임
- ③ 10보다 큰 홀수의 모임
- ④ 가장 작은 자연수의 모임
- ⑤ 10보다 조금 작은 수들의 모임

해설

- ① $\{5, 10, 15, \dots\}$
- ② $\emptyset$
- ③ $\{11, 13, 15, \dots\}$
- ④ $\{1\}$

2. 명제 ‘ x 가 소수이면 x 는 홀수이다.’는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

3. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「 $q \rightarrow \sim p$ 」도 참이다.

4. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$ 의 대소를
바르게 비교한 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$
④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$ 에서
 $b - a < 0$, $b - c > 0$, $a - c > 0$ 이므로
 $A = \frac{c}{b-a} < 0$, $B = \frac{a}{b-c} > 0$
 $C = \frac{b}{a-c} > 0$
$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$
$$\therefore B > C$$

따라서 $A < 0$, $B > C > 0$ 이므로
 $B > C > A$ 이다.

5. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의
최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$ (최솟값) = -16

6. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉤ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉥ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

- ① ㉠,㉡,㉢

② ㉠,㉡,㉤

③ ㉠,㉢,㉤

④ ㉡,㉢

⑤ ㉤,㉥

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r 는 오직 하나의 넓이 πr^2 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉥ 특정한 실수 a 를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, ... 등 무수히 많다. 즉, 실수 a 에 a 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다. 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉤이다.

7. 자연수의 집합을 N , 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q 는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q, 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2, 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

9. 집합 B 와 서로소인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $A - B$

㉡ $A^c \cap B^c$

㉢ $A - (A - B)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 집합 A 에서 B 와 공통되는 원소를 모두 제거했기 때문에 $A - B$ 는 B 와 서로소 관계에 있다.

㉡ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 원소들은 집합 A 와 B 에 공통되는 원소가 없다.
따라서 서로소 관계가 된다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(B-A) \cup (A \cap B)\} - A = \emptyset$ 이 성립할 때, 다음 중 옳은 것은 ?

- ① $A \subset B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A^c \subset B$
- ④ $B^c \subset A$
- ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned}(B-A) \cup (A \cap B) &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= B \cap (A^c \cup A) \\ &= B \cap U = B\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $B-A = \emptyset$

$$\therefore B \subset A$$

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cap (A - C)$ 를 변형한 것으로서 틀린 것은?

- ① $A - (B \cup C)$
- ② $(A - B) - C$
- ③ $A \cap (B \cup C)^c$
- ④ $A - (B - C)$
- ⑤ $A \cap (B^c \cap C^c)$

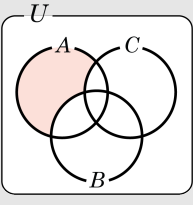
해설

$$\begin{aligned} &(A - B) \cap (A - C) \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \quad [\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cap C^c = (A - B) - C] \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C) \end{aligned}$$

위에서 ①, ②, ③, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

해설

$(A - B) \cap (A - C)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면,



벤다이어그램을 보면서 비교하는 것도 좋다.

12. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

13. $x > 0, y > 0, x + 2y = 1$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}, \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}, \frac{1}{8} \geq xy$$

즉 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \text{ 이므로 } xy = \frac{1}{8} \text{ 일 때 최소}$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$$

해설

$$x + 2y = 1 \text{ 이면 } y = \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2 + x = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\therefore x(1-x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고

$$\text{이때 } \frac{2}{x(1-x)} \text{ 의 최솟값은 } \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

14. 2 이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이 정의된 함수 f 가 있다.

$$f(p) = p \text{ } (p \text{가 소수})$$
$$f(rs) = f(r) + f(s) \text{ } (r, s \in A)$$

이 때, $f(2400)$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} f(2400) &= f(2^5 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^5) + f(3) + f(5^2) \\ &= 5f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 5 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 23 \end{aligned}$$

15. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

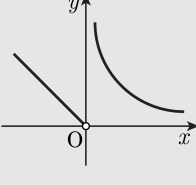
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
II . $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
III . $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I , II ④ II , III ⑤ I , III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>
II .
i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로
 $f(-x) = -(-x) = x,$
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로
 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$
i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>
III . 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>
따라서 옳은 것은 I , II 이다.

16. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \rightarrow Y$, $g(x) = ax + b$ 가 $f = g$ 일 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f 와 g 의 정의역이 같으므로
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이면 $f = g$ 가 된다
 $f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots \text{㉠}$
 $f(0) = 1 = g(0) = b \cdots \text{㉡}$
 $f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots \text{㉢}$
㉠, ㉡, ㉢에서
 $a = 1$, $b = 1$
따라서 $ab = 1$

17. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x^3 - 2x$ 가 같을 때, X 의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$ 에서

$$x^2 = x^3 - 2x, x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0, x = -1, 0, 2$$

$$\therefore X = \{-1, 0, 2\}$$

따라서 X 의 공집합을 제외한

부분집합이 되므로 7개

18. 두 집합 $A = \{2, 3, a, 7, b, 13, c\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } d \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, 다음 중 $a + b + c + d$ 의 값으로 옳은 것을 모두 고르면?

- ① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

해설

집합 A 의 원소의 개수가 7개이므로
집합 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
i) $d = 17$, ii) $d = 18$ 인 두 가지 경우가 있으므로
 $5 + 11 + 17 + 17 = 50$, $5 + 11 + 17 + 18 = 51$ 이다.

19. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는?

① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 22 개 ⑤ 24 개

해설

원소 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수 = 2^n

㉠ 집합 A 의 부분집합 개수: $2^5 = 32$

㉡ 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수: $2^3 = 8$

㉢ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수: $2^5 - 2^3 = 24$

20. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 X, Y 를 만들 수 있는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 27 개

해설

- (i) $X = \emptyset$ 일 때, 집합 Y 는 집합 A 의 모든 부분집합이므로
 $2^3 = 8$ (개)
- (ii) $X = \{a\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 a 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$
 $X = \{b\}, X = \{c\}$ 일 때도 마찬가지로 $3 \times 4 = 12$ (개)
- (iii) $X = \{a, b\}$ 일 때 집합 Y 는 a, b 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)
 $X = \{a, c\}, X = \{b, c\}$ 일 때도 마찬가지로 $2 \times 3 = 6$ (개)
- (iv) $X = \{a, b, c\}$ 일 때 $Y = \{a, b, c\}$ 뿐이므로
1 (개)
- $\therefore 27$ 개

21. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}$ 이고 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28개

해설

$A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 집합 B 는 적어도 A 의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로
(집합 B 의 갯수)
= (U 의 부분집합의 갯수) -
(A 의 원소를 포함하지 않는 U 의 부분집합의 갯수) $= 2^5 - 2^{5-3}$
 $= 2^5 - 2^2$
 $= 32 - 4 = 28$ (개)

22. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 를 $f(x) = r$ (r 은 $3x$ 를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n 이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n 의 값은? (단, $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f 의 대응을 조사해 보면
 $1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$
 $2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$
 $5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f 5$
 $\therefore f^4 = f^8 = f^{12} = \dots = I$ (항등함수)
 $\therefore$ 최소의 자연수는 4