1. 다음 중 집합이 <u>아닌</u> 것은?

① 5 의 배수의 모임

② 15 보다 큰 14 의 약수의 모임

③ 10 보다 큰 홀수의 모임

④ 가장 작은 자연수의 모임

⑤ 10 보다 조금 작은 수들의 모임

해설

① $\{5, 10, 15, \cdots\}$
② $\varnothing$
③ $\{11, 13, 15, \cdots\}$
④ $\{1\}$

2. 명제 'x 가 소수이면 x 는 홀수이다.' 는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

3. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　② $q \to p$　③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

4. $a > b > c > 0$일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$

④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$에서

$b-a<0,\ b-c>0,\ a-c>0$이므로

$$A = \frac{c}{b-a} < 0,\ B = \frac{a}{b-c} > 0$$

$$C = \frac{b}{a-c} > 0$$

$$\begin{aligned} B - C &= \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c)-b(b-c)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b)-c(a-b)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore B > C$

따라서 $A<0,\ B>C>0$이므로

$B > C > A$이다.

5. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

6. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉤　　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의
넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서
$b^2 - 4ac < 0$이면 대응을 갖지 못하고(허근),
$b^2 - 4ac > 0$이면 두 개의 대응을 가지므로
(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로
함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고
그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은
$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히
많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

7. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f 가 $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ 으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ 0)$
② $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ q)$
③ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+q,\ 0)$
④ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (0,\ pq)$
⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p,\ q)$

해설

① $\frac{2}{3} \neq \frac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = (2.\ 0)$

②,③,④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x)=-2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x)=x$ 에서 $f(4)=4$
$g(x)=-2$ 에서 $g(-1)=-2$
$\therefore f(4)+g(-1)=4-2=2$

9. 집합 B 와 서로소인 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ. $A-B$　　ㄴ. $A^c \cap B^c$　　ㄷ. $A-(A-B)$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 집합 A 에서 B 와 공통되는 원소를 모두 제거했기 때문에 $A-B$ 는 B 와 서로소 관계에 있다.

ㄴ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 원소들은 집합 A 와 B 에 공통되는 원소가 없다.

따라서 서로소 관계가 된다.

10. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $\{(B-A)\cup(A\cap B)\}-A=\varnothing$이 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A\subset B$　② $B\subset A$　③ $A^c\subset B$

④ $B^c\subset A$　⑤ $A=B$

해설

$$\begin{aligned}(B-A)\cup(A\cap B)&=(B\cap A^c)\cup(A\cap B)\\&=B\cap(A^c\cup A)\\&=B\cap U=B\end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $B-A=\varnothing$

$\therefore B\subset A$

11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A-B)\cap(A-C)$를 변형한 것으로서 틀린 것은?

① $A-(B\cup C)$ ② $(A-B)-C$ ③ $A\cap(B\cup C)^c$

④ $A-(B-C)$ ⑤ $A\cap(B^c\cap C^c)$

해설

$(A-B)\cap(A-C)$

$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)$

$=A\cap(B^c\cap C^c)$ $[\leftrightarrow (A\cap B^c)\cap C^c=(A-B)-C]$

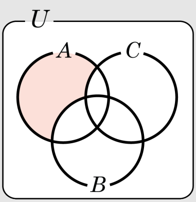
$=A\cap(B\cup C)^c$

$=A-(B\cup C)$

위에서 ①, ②, ③, ⑤가 성립함을 알 수 있다.

해설

$(A-B)\cap(A-C)$를 벤다이어그램으로 나타내면,



벤다이어그램을 보면서 비교하는 것도 좋다.

12. $x \leq -1$은 $x \leq a$이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$는 $x \geq 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$은 $x \leq a$이기 위한 필요조건이므로

「$x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.

$\therefore\ a \leq -1$

또, $x \geq b$는 $x \geq 3$이기 위한 충분조건이므로

「$x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.

$\therefore\ b \geq 3$

따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로

구하는 값은 $-1+3=2$이다.

13. $x>0,\ y>0,\quad x+2y=1$ 일 때, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x>0,\ y>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$x+2y=1\geq 2\sqrt{2xy},\ \dfrac{1}{2}\geq \sqrt{2xy},\ \dfrac{1}{8}\geq xy$

즉 xy 의 최댓값은 $\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$ 이므로 $xy=\dfrac{1}{8}$ 일 때 최소

$\therefore\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 8$

해설

$x+2y=1$ 이면 $y=\dfrac{1-x}{2}$

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{\frac{1-x}{2}}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{2}{x(1-x)}$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$$x(1-x)=-x^2+x=(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}$$
$$=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

$\therefore\ x(1-x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$ 이고

이때 $\dfrac{2}{x(1-x)}$ 의 최솟값은 $\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=8$

14. 2 이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이 정의된 함수 f 가 있다.

$f(p) = p$ (p가 소수)
$f(rs) = f(r) + f(s)(r, s \in A)$

이 때, $f(2400)$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} f(2400) &= f(2^5 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^5) + f(3) + f(5^2) \\ &= 5f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 5 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 23 \end{aligned}$$

15. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

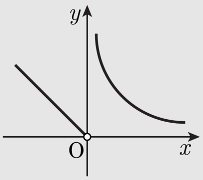
$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0)\\-x(x<0)\end{cases}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=\frac{10}{3}$ Ⅱ. $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ Ⅲ. $x_1>x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ ④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



Ⅰ. $f(f(3))+f(f(-3))=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)$

$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ -<참>

Ⅱ.

ⅰ) $x>0$ 일 때, $-x<0$, $\frac{1}{x}>0$ 이므로

$f(-x)=-(-x)=x$,

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$

ⅱ) $x<0$ 일 때, $-x>0$, $\frac{1}{x}<0$ 이므로

$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}$

ⅰ), ⅱ) 에서 $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

Ⅲ. 반례) $\frac{1}{3}>-2$ 일 때,

$f\left(\frac{1}{3}\right)=3>2=f(-2)$ -<거짓>

따라서 옳은 것은 Ⅰ, Ⅱ 이다.

16. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \to Y$, $g(x) = ax + b$가 $f = g$일 때, ab의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f와 g의 정의역이 같으므로
$f(-1) = g(-1),\ f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$이면 $f = g$가 된다
$f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots$ ㉠
$f(0) = 1 = g(0) = b \cdots$ ㉡
$f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$a = 1,\ b = 1$
따라서 $ab = 1$

17. 실수를 원소로 갖는 집합 X가 정의역인 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=x^3-2x$가 같을 때, X의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x)=g(x)$에서

$x^2=x^3-2x,\ x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0,\ x=-1,\ 0,\ 2$

$\therefore\ X=\{-1,\ 0,\ 2\}$

따라서 X의 공집합을 제외한

부분집합이 되므로 7개

18. 두 집합 $A=\{2,\ 3,\ a,\ 7,\ b,\ 13,\ c\}$, $B=\{x \mid x$는 d 이하의 소수$\}$ 에 대하여 $A=B$ 일 때, 다음 중 $a+b+c+d$ 의 값으로 옳은 것을 모두 고르면?

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

해설

집합 A 의 원소의 개수가 7개이므로
집합 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17\}$
ⅰ) $d=17$, ⅱ) $d=18$ 인 두 가지 경우가 있으므로
$5+11+17+17=50$, $5+11+17+18=51$ 이다.

19. 집합 $A=\{1,3,5,7,9\}$ 의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는?

① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 22 개 ⑤ 24 개

해설

원소 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수 $=2^n$

㉠ 집합 A 의 부분집합 개수 : $2^5=32$

㉡ 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수 : $2^3=8$

㉢ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수 : $2^5-2^3=24$

20. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 $X,\ Y$ 를 만들 수 있는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 27 개

해설

(i) $X = \varnothing$ 일 때, 집합 Y 는 집합 A 의 모든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개)

(ii) $X = \{a\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 a 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$

$X = \{b\}$, $X = \{c\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $3 \times 4 = 12$ (개)

(iii) $X = \{a,\ b\}$ 일 때 집합 Y 는 $a,\ b$ 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)

$X = \{a,\ c\}$, $X = \{b,\ c\}$ 일 때도 마찬가지 이므로 $2 \times 3 = 6$ (개)

(iv) $X = \{a,\ b,\ c\}$ 일 때 $Y = \{a,\ b,\ c\}$ 뿐이므로 1 (개)

$\therefore$ 27 개

21. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$이고 $A\cap B\neq\varnothing$일 때, 집합 B의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

$A\cap B\neq\varnothing$이므로 집합 B는 적어도 A의 원소를 한 개 이상 가지고 있는 전체집합의 부분집합이므로

(집합 B의 갯수)

$=$ (U의 부분집합의 갯수) $-$

(A의 원소를 포함하지 않는 U의 부분집합의 갯수) $=2^5-2^{5-3}$

$=2^5-2^2$

$=32-4=28$(개)

22. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f를 $f(x) = r$(r은 $3x$를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n은 자연수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f의 대응을 조사해 보면

$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$

$2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$

$5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f\,5$

$\therefore\ f^4 = f^8 = f^{12} = \cdots = I$(항등함수)

$\therefore$ 최소의 자연수는 4