

1. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$
 $= 2(x + 3y)$
 $= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

2. 세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

- ① $(2, 3)$
- ② $(-2, 3)$
- ③ $(2, -3)$
- ④ $(-2, -3)$
- ⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
 $(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$
 $\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$
 $\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $6^2 + 6a + c = 0$
 $\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $a = -4$, $b = 6$, $c = -12$
즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로
표준형으로 나타내면
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

3. $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 이 원의 방정식이 되기 위한 m 의 범위는?

- ① $-3 < m < 1$ ② $-1 < m < 3$
③ $m < -3$ 또는 $1 < m$ ④ $m < -1$ 또는 $3 < m$
⑤ $0 < m < 3$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 &= 0 \\ \text{원이 되려면 } r &> 0 \\ \{x + (m-1)\}^2 + \{y - m\}^2 + m^2 + 2m - 3 &= 0 \\ (x + m - 1)^2 + (y - m)^2 &= 3 - 2m - m^2 \\ 3 - 2m - m^2 > 0 &\rightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \\ \therefore -3 < m < 1 \end{aligned}$$

4. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

- ㉠ $y = -3x - 2$ ㉡ $y = 3x + 2$ ㉢ $y = -3x + 2$
㉣ $y = -3x + 4$ ㉤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은

$$y - (-2) = -3x$$

$$\therefore y = -3x - 2$$

5. 다음 중 옳은 것은?

- ① $A = \emptyset$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 1 개 이다.
- ② 집합 A 의 원소의 개수보다 집합 B 의 원소의 개수가 많으면 $A \subset B$ 이다.
- ③ $A \subset B$ 이면 집합 B 의 원소의 개수가 집합 A 의 원소의 개수보다 많다.
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 5\text{의 배수}\}$ 이면 $n(A) = 3$ 이다.
- ⑤ $n(\{1, 4, 6, 8\}) - n(\{1, 2, 4, 6\}) = 0$ 이다.

해설

- ① $A = \emptyset$ 이면 집합 A 의 원소의 개수는 0 개 이다.
- ② 반례: $\{3\} \not\subset \{4, 5\}$
- ③ 반례: $\{2, 4\} \subset \{2, 4\}$, $n(\{2, 4\}) = n(\{2, 4\})$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 5\text{의 배수}\}$ 이면 $n(A) = 2$ 이다.

6. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

7. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

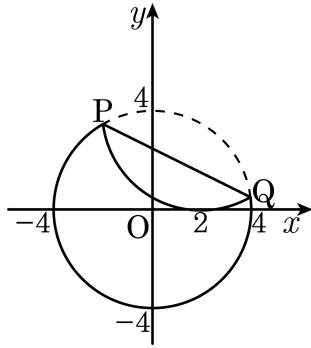
▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

8. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접했을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

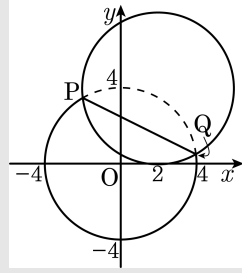


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

9. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 y 축의 방향으로 b 만큼, 평행이동하면 직선 $4x - 3y - 4 = 0$ 에 접한다고 할 때 b 의 값은?(단, $b > 0$)

- ㉠ $\frac{1}{3}$ ㉡ $\frac{2}{3}$ ㉢ 1 ㉣ $\frac{4}{3}$ ㉤ $\frac{5}{3}$

해설

y 축 방향으로 b 이동시키면
 $x^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다.
이 원과 $4x - 3y - 4 = 0$ 이 접하므로,
원 중심과 직선 사이 거리는 반지름과 같다.
 $\Rightarrow \frac{|-3 \times b - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$
 $\Rightarrow |-3b - 4| = 5$
 $\Rightarrow b = \frac{1}{3}$ ($\because b > 0$)

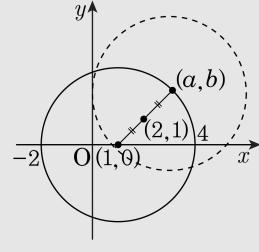
10. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 을 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동 한 원의 방정식은?

- ① $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ② $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$
 ③ $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ ④ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$
 ⑤ $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9$$



대칭이동한 원의 중심을 (a, b) 라 하면 $\frac{1+a}{2} = 2, \frac{0+b}{2} = 1$

$$\therefore a = 3, b = 2$$

$$\therefore (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

11. 직선 $2x - y - 1 = 0$ 에 대하여 점 (3, 0) 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① (1, 2)

② (-1, 2)

③ (1, -2)

④ (2, -1)

⑤ (-2, 1)

해설

구하는 좌표를 (a, b) 로 놓는다.

점 (a, b) 는 점(3, 0) 과 직선 $2x - y - 1 = 0$ 에 대하여 대칭이고, 이 때 점 (3,0)과 점 (a, b) 를 연결하는 선분에서 $2x - y - 1 = 0$ 와 수직으로 만나므로

중점 M 의 좌표는 $M\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$2 \times \frac{a+3}{2} - \frac{b}{2} - 1 = 0$$

$$2a + 6 - b - 2 = 0$$

$$2a - b + 4 = 0 \quad \dots\dots (가)$$

기울기는 $\frac{b}{a-3} \times 2 = -1$ 이므로

$$a = -2b + 3$$

이것을 (가) 에 대입하면

$$2(-2b + 3) - b + 4 = 0 \quad \therefore a = -1, b = 2$$

12. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ ② $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $x^2 + y^2 = 4$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 2인 ④이다.

13. $U = \{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5\}$ 일 때, $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c$ 은?

- ① {1}
- ② {4}
- ③ {1, 4}
- ④ {2, 5}
- ⑤ {1, 4, 5}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A - B = \{1, 4\}$ 이므로 $\{(A - B) \cup A\} \cap B^c = \{1, 4\} \cup A - B = \{1, 2, 4, 5\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4\}$ 이다.

14. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : |x - 2| < a \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$
$$q : x < -3 \text{ 또는 } x > 1$$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$|x - 2| < a$ 에서 $-a < x - 2 < a \therefore 2 - a < x < 2 + a \therefore$
 $P = \{x | 2 - a < x < 2 + a\}$, $Q = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 1\}$
따라서 $P \subset Q$ 가 되려면 $2 + a \leq -3 \dots \textcircled{1}$ 또는 $2 - a \geq 1 \dots \textcircled{2}$,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a > 0$ 이므로 구하는 a 의 범위는 $0 < a \leq 1$

$\textcircled{1}$:

$\textcircled{2}$:

$\therefore \alpha = 0, \beta = 1$
 $\therefore \alpha + \beta = 1$

15. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.
따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참
- ③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참
- ⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

16. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $1 < a < 2$
 ② $1 \leq a \leq 2$
- ③ $a < 1$ 또는 $a > 2$
 ④ $a \leq 1$ 또는 $a \geq 2$
- ⑤ $a > 0$

해설

$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
 $\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \leq a\}$
 $\therefore a \geq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로
 $\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$
 $\therefore a \leq 2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

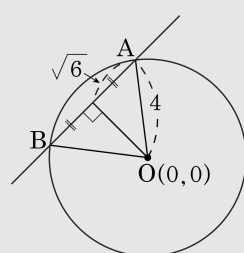
따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \leq a \leq 2$

17. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, |k| = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{5} \quad (\because k > 0)$$

18. 점 $(1, -1)$ 에서 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
 $y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}},$$

$$|-2m-3| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 3m^2+12m+8=0$$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4 이다.

19. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$ 의 부분집합을 X 라고 하자. 집합 X 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$$A = \{1, 2, 4\}$$

$$X : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \\ \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$$

집합 X 의 원소들의 합에는 1, 2, 4가 각각 4번씩 더해지므로
 $(1 + 2 + 4) \times 4 = 28$

20. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11, n(B) = 13, n(C) = 10, n(A \cap B) = 4, n(B \cup C) = 17, A \cap C = \emptyset$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

- ① 12 ② 17 ③ 24 ④ 30 ⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

$\therefore n(A \cup B \cup C) = 24$

21. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $B \cap X = B$, $(A - B) \cap X = \{1, 3\}$ 을 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 2개

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ,}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ,}$$
$$B = \{4, 5, 6\} \circ | \overline{\mathbf{g}},$$
$$B \cap X = B \Rightarrow B \subset X,$$
$$(A - B) \cap X = \{1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 3\} \text{ 이므로}$$

X 는 원소 1, 3, 4, 5, 6 을 반드시 포함하는 집합 U 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^{6-5} = 2$ (개)

22. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 는 중심이 (a, b) 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ 0

해설

P = (α, β) 라 하면,
 $G = \left(\frac{-5+2+\alpha}{3}, \frac{-2+5+\beta}{3} \right)$
 $= \left(-1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$
 $-1 + \frac{\alpha}{3} = p, \quad 1 + \frac{\beta}{3} = q$ 라 하면,
 $\alpha = 3p + 3, \quad \beta = 3q - 3, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 9$ 이므로
 $\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$
 $\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$
 $\Rightarrow$ 중심이 $(-1, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원
 $\therefore a + b + c = 1$

23. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.
전체집합 $U = \{x|x \leq 60, x \text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

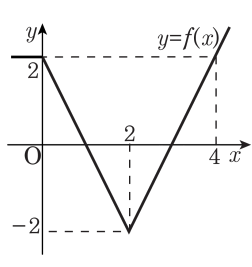
해설

$$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

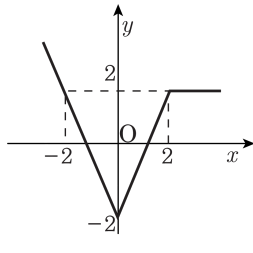
,

$$A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$$
$$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60\},$$
$$B = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$$
$$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\},$$
$$C = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$$
$$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\},$$
$$(A \bullet B) \bullet C$$
$$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54, 56\} \bullet C$$
$$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$$
$$\therefore (A \bullet B) \bullet C \text{의 원소 중 가장 큰 값} = 54$$

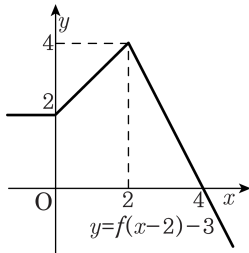
24. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



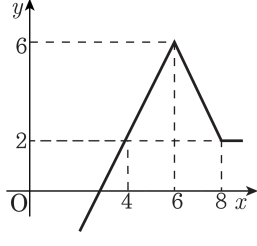
①



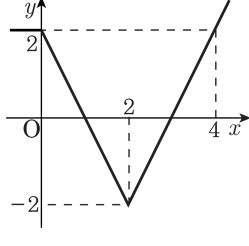
②



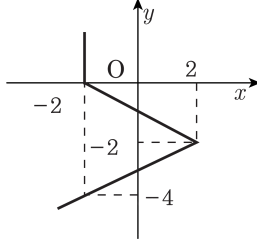
③



④



⑤



해설

$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에
 대하여 대칭이동한 것이다.
 그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면
 ① 과 같다.

25. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 를 $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ 인 두 집합 A , B 로 분할한다. 또 $f(A)$ 를 집합 A의 원소의 총합, $f(B)$ 를 집합 B의 원소의 총합이라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면 ?

① 5

② 10

③ 15

④ 25

⑤ 45

해설

$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ 이므로, $f(A) + f(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\begin{aligned}\therefore f(A) \cdot f(B) &= f(A)(10 - f(A)) \\ &= -\{f(A)\}^2 + 10f(A) \\ &= -\{f(A) - 5\}^2 + 25\end{aligned}$$

$\therefore f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 25