1. 함수 $f(x) = ax^3 - bx + 10$ ($a,\ b$ 는 상수) 에 대하여 $f(-7) = 5$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$f(-7) = -7^3a + 7a + 10 = 5$ 에서, $7^3a - 7b = 5$

$\therefore\ f(7) = 7^3a - 7b + 10 = 5 + 10 = 15$

2. $X = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \le y \le 3\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}$, $b = 0$ ⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \frac{3}{2}$, $b = 0$

3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

4. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

5. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$ 를 모두 고르면?

(i) $f(x) = Y$(단, $x \in X$)
(ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단,x, $x_2 \in X$)

A . $f(x) = x^2 - 1$
B . $f(x) = |x| + 2x$
C . $f(x) = x^3 + 1$
D . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

① A, B　② A, C　③ B, C　④ B, D　⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

6. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

7. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

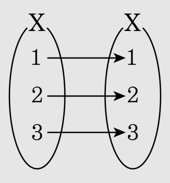
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 $-1,\ 0,\ 1$ 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

8. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$
즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



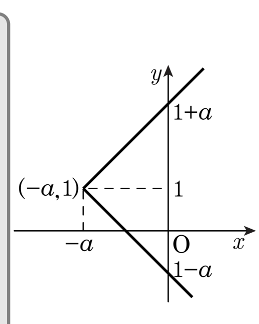
9. $|y-1| = x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|y-1| = x+a$ 의
그래프는 $|y| = x$를
x 축 음의 방향으로 a,
y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1| = a$ 에서 $y = 1 \pm a$

$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 4 \quad \therefore\ a = 2 (a > 0)$



10. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

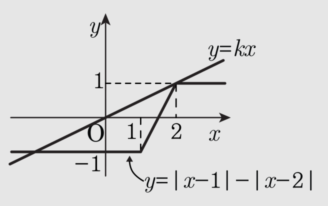
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ①이다.

11. N 을 자연수의 집합이라 할 때, 함수 $f : N \to N \cup \{0\}$ 이

(i) p 가 소수이면 $f(p)=1$ (ii) $f(mn)=nf(m)+mf(n)$

을 만족시킨다고 한다. 이 때, $f(2^{2002})$ 의 값은?

① $2001 \cdot 2^{2001}$　　② $2001 \cdot 2^{2002}$　　③ $2002 \cdot 2^{2001}$

④ $2002 \cdot 2^{2002}$　　⑤ $2003 \cdot 2^{2001}$

해설

$f(mn)=nf(m)+mf(n)$ 에서 양변을 mn 으로 나누면

$$\frac{f(mn)}{mn}=\frac{f(m)}{m}+\frac{f(n)}{n}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(2^{2002})}{2^{2002}} &= \frac{f(2)}{2}+\frac{f(2^{2001})}{2^{2001}} \\ &= \frac{1}{2}+\left\{\frac{f(2)}{2}+\frac{f(2^{2000})}{2^{2000}}\right\} \\ &\vdots \\ &= 2002\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore f(2^{2002})=2002 \cdot 2^{2001}$

12. 함수 $y=f(x)$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$ 의 역함수는?

① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$　② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$　③ $3g(x)-2$
④ $3g(x)+2$　⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

해설

$y=f(3x-2)$ 의 역함수를 구하기 위하여 x, y를 바꾸면
$x=f(3y-2)$
$\therefore 3y-2=f^{-1}(x)=g(x)$
$\therefore y=\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$