1. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① -6　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$(x-3)(x^2 - 4x - 3) = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$의 두 근이 a, b($\because$무리수)

$a + b = 4$

2. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서

$x^2+x=A$ 라 하면

$A^2+2A-8=0,$

$(A+4)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x=-4$ 일 때,

$x^2+x+4=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2+x=2$ 일 때,

$x^2+x-2=0,$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은

$-2+1=-1$

3. 사차방정식 $x^4+3x^2+a=0$의 한 근이 1일 때, 허근은?

① $\pm i$　② $\pm 2i$　③ $\pm 3i$　④ $\pm 4i$　⑤ $\pm 5i$

해설

한 근이 1이므로 사차방정식 $x^4+3x^2+a=0$에 대입하면

$1+3+a=0, \qquad \therefore a=-4$

방정식 $x^4+3x^2-4=0$에서 $x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-4=0$, $(t+4)(t-1)=0$, $(x^2+4)(x^2-1)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 1$

따라서, 주어진 방정식의 허근은 $\pm 2i$이다.

4. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

5. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -15 ② -10 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1-\sqrt{2}i$

세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma=3$ 이므로, $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$

라 하면, $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\cdot\gamma=3$

$3\cdot\gamma=3$

$\gamma=1$

$\alpha+\beta+\gamma=-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=3$

$a=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=b=3+(1-\sqrt{2}i)\cdot 1+1\cdot(1+\sqrt{2}i)=5$

$b=5$

$\therefore\ ab=(-3)\cdot 5=-15$

6. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　② 3　③ $\frac{3}{2}$　④ -2　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을

x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$

이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,

$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로

실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.

$\therefore a+b=4$

7. 삼차방정식 $x^3+(p-4)x-2p=0$의 중근을 α, 다른 한 근을 β라 할 때 $\alpha+\beta+p$의 값을 구하면?

① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2

④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x)=x^3+(p-4)x-2p$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+p)=0$

따라서 $x=2,\ x^2+2x+p=0$

그런데 중근을 가져야 하므로

ⅰ) $x=2$가 x^2+2x+p의 근일 때

$2^2+2\times 2+p=0$

$\therefore\ p=-8,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)^2(x+4)$

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-4$

따라서, $\alpha+\beta+p=2+(-4)+(-8)=-10$

ⅱ) $x^2+2x+p=0$이 중근을 가질 때

$D/4=0$이므로 $D/4=1-p=0$

$\therefore\ p=1,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2)(x+1)^2$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2,\ p=1$

따라서, $\alpha+\beta+p=-1+2+1=2$

ⅰ) ⅱ)로부터 $\alpha+\beta+p$의 값은 -10 또는 2이다.

8. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2 으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(i) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ii) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$
$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$

9. x에 관한 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 해를 α, β라고 할 때, 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$가 $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, $f(\alpha+\beta) = \alpha+\beta$, $f(0) = -1$을 만족한다. 이 때 $ab + cd$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근 : α, β,

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 1$

$f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$,

$f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$이므로

$f(x) - x = a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x - (\alpha+\beta)\right\}$

$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a = 1 (\because \alpha\beta = 1, \alpha+\beta = 1)$

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-1) + x$

$(\because \ \alpha + \beta = 1)$

$f(x) = x^3 - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x - \alpha\beta$

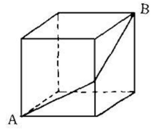
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a = 1, b = -2, c = 3, d = -1$

$\therefore \ ab + cd = -2 - 3 = -5$

10. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 28cm^2, 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A 에서 꼭짓점 B 에 이르는 가장 짧은 거리는?



① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}$cm

④ $\sqrt{29}$cm ⑤ $\sqrt{37}$cm

해설

각 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$4(a+b+c)=28$

$2(ab+bc+ca)=28$

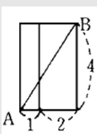
$abc=8$

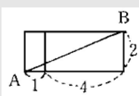
$\therefore\ a+b+c=7$

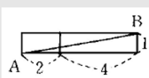
$ab+bc+ca=14$

$abc=8$

이 때, a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3-7x^2+14x-8=0$ $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm , 2cm , 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B 에 이르는 거리를전개도를 이용하여 구해 보자.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(i) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$

(ii) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}(\text{cm})$

(iii) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}(\text{cm})$

따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm