

1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$
 $= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - x - 2 = 0$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$
(i) $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
(ii) $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2) \neq 0$
 $\therefore x \neq 1$ 또는 $x \neq 2$
따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

2. 실수 x, y 에 대하여, 등식 $2x + y + (x - 3y)i = 3 + 2i$ 가 성립할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x + y = 3, x - 3y = 2$ 이므로

$$x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \times -\frac{7}{1} = -11$$

3. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

- ㉠ $z \cdot \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉡ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.
- ㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.
- ㉤ $(z+1)(\bar{z}+1)$ 은 실수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉤

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉤ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$
 $= (a+1+bi)(a+1-bi)$
 $= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

4. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면
 $(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$
 $(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$
 $(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a-3b+3 = 0, 3a+b = 0$
두 식을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$
 $\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

5. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때 k 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \text{에서}$$

중근을 가질 조건이므로

$$\frac{D}{4} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$2k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

6. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a - m - 1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$
 m 의 값에 관계없이
 $2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$
이어야 하므로
 $2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$
 $\therefore a = 1, b = 1$
 $\therefore a + b = 2$

7. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

8. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록

하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

9. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a - b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$$a \geq 0, b < 0$$

$$|a| + |b| - |a - b| = a - b - (a - b) = 0$$

10. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

$$\begin{aligned} 1) \quad & ax + 1 = x^2 + x + 2 & 2) \quad & ax + 1 = -x^2 + 4x \\ \Rightarrow & x^2 + (1-a)x + 1 = 0 & \Rightarrow & x^2 + (a-4)x + 1 = 0 \\ D = & (a-1)^2 - 4 < 0 & D = & (a-4)^2 - 4 < 0 \\ \Rightarrow & -1 < a < 3 & \Rightarrow & 2 < a < 6 \end{aligned}$$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$\therefore \alpha + \beta = 5$

11. 두 함수 $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = -x^2 + 4x + a + b$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 , $g(x)$ 의 최댓값은 9 라고 할 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

- ① $\begin{cases} a = 3, b = -8 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} a = -2, b = 6 \\ a = 2, b = -3 \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} a = -3, b = 8 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} a = -1, b = 2 \\ a = 2, b = 3 \end{cases}$
- ⑤ $\begin{cases} a = -3, b = 8 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

해설

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + b$ 에서 $x = a$ 일 때, 최솟값은 $-a^2 + b = -1$
 $\dots$ ①

$g(x) = -(x-2)^2 + 4 + a + b$ 에서 $x = 2$ 일 때, 최댓값은
 $4 + a + b = 9 \dots$ ②

② 에서 $b = -a + 5$

이것을 ① 에 대입하면,

$$-a^2 - a + 5 = -1, \quad a^2 + a - 6 = 0$$

$$\therefore a = -3, \quad a = 2$$

즉 $a = -3$ 일 때, $b = 8$

$a = 2$ 일 때, $b = 3$

12. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x + 1)^2 - 1$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
 $t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은? (단, a 는 실수)

① 12

② 9

③ 6

④ 3

⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 9 - 2a^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$$

또 α, β 는 실근이므로 $\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$

$$\therefore a^2 \geq 3$$

따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고

최소값은 6이다.

14. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$f(x) = g(t) = t(t + 1) + 3t - 6$$

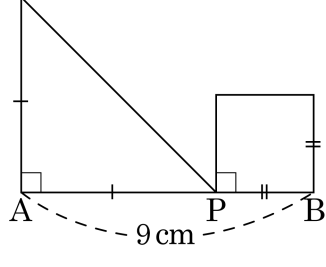
$$= t^2 + 4t - 6$$

$$= (t + 2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$g(1) = (1 + 2)^2 - 10 = -1$$

15. 길이가 9cm인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



- ① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
 ④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

16. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

17. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

1) $y = 2x$ 일 때

$$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20 \quad \therefore x = \pm 2, y = \pm 4$$

2) $x = -2y$ 일 때

$$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$$

$$\therefore y = \pm 2, x = \mp 4 \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore (x, y) = (2, 4), (-2, -4), (-4, 2), (4, -2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, -2, 2$$

그러므로 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 -6

18. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

19. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 해근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 해근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2=-\omega-2$
 $f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
 $= (b-a)\omega+(12-2a)$
 $f(\omega)=3\omega$ 이므로
 $(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
 $b-a=3, 12-2a=0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$
 $\therefore a=6, b=9$

20. α, β, γ 가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$ 의 세 근일 때, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$

를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

- ① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$
- ② $x^3 - ax - 3 = 0$
- ③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$
- ④ $x^3 + ax + 3 = 0$
- ⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned} &x^3 - ax - 3 \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= 0 \text{에서} \\ &\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ &\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \alpha\beta\gamma = 3 \\ &\therefore \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}, \\ &\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \\ &\frac{\alpha + \gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

따라서, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}, \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha + \gamma}{\beta^2}$ 를

세 근으로 하는 방정식은

$$\begin{aligned} &\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ &= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0 \\ &\therefore 3x^3 - ax^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

21. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$$x+1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$$

$$5y^2 + 10y + 5 = 0$$

$$5(y+1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x + y = -2$$

22. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 x , y 라 할 때, $xy - 3x + 2y = 18$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$xy - 3x + 2y = 18, x(y - 3) + 2y = 18,$
 $x(y - 3) + 2(y - 3) = 12$
 $(x + 2)(y - 3) = 12$
 $x + 2 \geq 3$ 이므로
 $(x + 2, y - 3) = (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)$
 $\therefore (x, y) = (1, 7), (2, 6), (4, 5), (10, 4)$
 $\therefore$ 4개

23. 방정식 $|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a 의 값은?

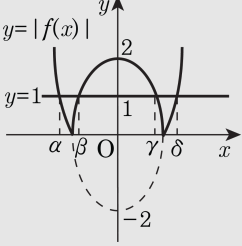
- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a - 2)x - 2 = \pm 1$
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a - 2)$
... ㉠
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a - 2)$
... ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a - 2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a - 2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore a - 2 = 0, a = 2$

24. 직선 $y = -2x + 2$ 에 접하는 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 x 축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = -2x + 2 \Rightarrow x^2 + (a+2)x + b-2 = 0$
두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.
 $D = (a+2)^2 - 4(b-2) = 0$
 $\therefore b = \frac{1}{4}(a^2 + 4a + 12) \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
포물선과 x 축과의 교점의 x 좌표를 구하는 식은
 $x^2 + ax + b = 0$ 이 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 $|\alpha - \beta| = 2$ 이므로 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b = 4 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a^2 - (a^2 + 4a + 12) = 4$
 $\therefore a = -4, b = 3 \quad \therefore a + b = -1$

25. α, β 를 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$ 라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 1 = 0, \\ & (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \\ & \therefore \alpha^3 = 1, \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ & \text{따라서 } n \geq 2 \text{인 모든 정수에 대해} \\ & \alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0 \text{이고,} \\ & \beta \text{에 대해서도 마찬가지이다.} \\ & P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2) \\ &= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n) \\ &+ (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \\ &= (1 + 1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}) \\ &+ (\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2}) \\ &= 2 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$