1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

3. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

4. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$　② $-3+9i$　③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$　⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

5. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ -1　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$2k+1=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$

6. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$$

$$\therefore a=1,\ b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

7. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

8. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

9. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a|+|b|-|a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a|+|b|-|a-b| = a-b-(a-b) = 0$

10. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$
$\Rightarrow x^2 + (1-a)x + 1 = 0$
$D = (a-1)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$

2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (a-4)x + 1 = 0$
$\Rightarrow D = (a-4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$
$\therefore \alpha + \beta = 5$

11. 두 함수 $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = -x^2 + 4x + a + b$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 , $g(x)$ 의 최댓값은 9 라고 할 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $\begin{cases} a = 3,\ b = -8 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$
② $\begin{cases} a = -2,\ b = 6 \\ a = 2,\ b = -3 \end{cases}$
③ $\begin{cases} a = -3,\ b = 8 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$
④ $\begin{cases} a = -1,\ b = 2 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$
⑤ $\begin{cases} a = -3,\ b = 8 \\ a = 1,\ b = 2 \end{cases}$

해설

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + b$ 에서 $x = a$ 일 때, 최솟값은 $-a^2 + b = -1$ $\cdots$①

$g(x) = -(x-2)^2 + 4 + a + b$ 에서 $x = 2$ 일 때, 최댓값은 $4 + a + b = 9 \cdots$ ②

② 에서 $b = -a + 5$

이것을 ① 에 대입하면,

$-a^2 - a + 5 = -1,\ a^2 + a - 6 = 0$

$\therefore a = -3,\ a = 2$

즉 $a = -3$ 일 때, $b = 8$

$a = 2$ 일 때, $b = 3$

12. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12 ② 9 ③ 6 ④ 3 ⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = 9 - 2a^2$
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$
또 α, β 는 실근이므로 $\dfrac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$
$\therefore a^2 \geq 3$
따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

14. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

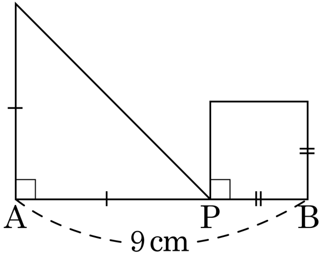
$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x)=g(t)&=t(t+1)+3t-6\\ &=t^2+4t-6\\ &=(t+2)^2-10\ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

15. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm

④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

16. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

17. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하면?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20 \quad \therefore \ x=\pm 2,\ y=\pm 4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore \ y=\pm 2,\ x=\mp 4$ (복호동순)

$\therefore (x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore \ \alpha+\beta= \ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

18. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1 + 3a + b = 0 \quad \cdots$ ㉠

$1 - a + c = 0 \quad \cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ : $4a + b - c = 0$

$\therefore\ b - c = -4a$

$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$

따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

19. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a,b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

20. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$의 세 근일 때, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$

② $x^3 - ax - 3 = 0$

③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$

④ $x^3 + ax + 3 = 0$

⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$x^3 - ax - 3$

$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$= 0$에서

$\alpha + \beta + \gamma = 0,$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a,\ \alpha\beta\gamma = 3$

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\dfrac{\gamma}{\gamma^2} = -\dfrac{1}{\gamma},$

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = -\dfrac{\alpha}{\alpha^2} = -\dfrac{1}{\alpha},$

$\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2} = -\dfrac{\beta}{\beta^2} = -\dfrac{1}{\beta}$

따라서, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$\left(x + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(x + \dfrac{1}{\gamma}\right)$

$= x^3 + \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+ \left(\dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$= x^3 + \left(-\dfrac{a}{3}\right)x^2 + \dfrac{1}{3} = 0$

$\therefore\ 3x^3 - ax^2 + 1 = 0$

21. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4}\geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(x+6)^2-5(2x^2+6x+9)\\&=-9x^2-18x-9=-9(x+1)^2\geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

22. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 x, y라 할 때, $xy-3x+2y=18$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$xy-3x+2y=18,\ x(y-3)+2y=18,$

$x(y-3)+2(y-3)=12$

$(x+2)(y-3)=12$

$x+2\geq 3$이므로

$(x+2,\ y-3)=(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)$

$\therefore\ (x,\ y)=(1,7),(2,6),(4,5).(10,4)$

$\therefore$ 4개

23. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2| = 1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|x^2+(a-2)x-2| = 1 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x-2 = \pm 1$

$x^2+(a-2)x-2=1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta = -(a-2)$ … ㉠

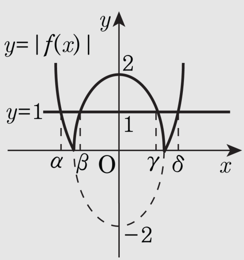
$x^2+(a-2)x-2=-1$ 의 두 근을 γ, δ라 하면 $\gamma+\delta=-(a-2)$ … ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta = -2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a-2=0 \therefore a=2$

해설

$f(x)=x^2+(a-2)x-2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)|=1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ 이기 위해서는$y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a-2=0,\ a=2$

24. 직선 $y=-2x+2$에 접하는 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 x축에 의해서 잘려진 선분의 길이가 2일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

포물선과 직선의 교점의 x좌표를 구하는 식은
$x^2+ax+b=-2x+2$ $x^2+(a+2)x+b-2=0$
두 그래프가 접하므로 이 방정식을 중근을 갖는다.
$D=(a+2)^2-4(b-2)=0$
$\therefore\ b=\frac{1}{4}(a^2+4a+12) \quad \cdots$ ㉠
포물선과 x축과의 교점의 x좌표를 구하는 식은
$x^2+ax+b=0$이 방정식의 두 근을 α, β라 하면
$|\alpha-\beta|=2$이므로 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b=4 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2-(a^2+4a+12)=4$
$\therefore\ a=-4,\ b=3 \quad \therefore\ a+b=-1$

25. α,β를 $x^2+x+1=0$의 두 근이라 하고 $P(n)=\alpha^n+\beta^n$라 할 때, $P(3n)+P(n)+P(n-1)+P(n-2)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0,$

$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3-1=0$

$\therefore \alpha^3=1,\ \alpha^2+\alpha+1=0$

따라서 $n\geq 2$인 모든 정수에 대해

$\alpha^n+\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}=0$이고,

β에 대해서도 마찬가지이다.

$P(3n)+P(n)+P(n-1)+P(n-2)$

$=(\alpha^{3n}+\beta^{3n})+(\alpha^n+\beta^n)$

$+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$

$=(1+1)+(\alpha^n+\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2})$

$+(\beta^n+\beta^{n-1}+\beta^{n-2})$

$=2+0+0=2$