

1. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

2. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k \leq 4$

② $\frac{1}{4} \leq k \leq 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y-k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(k-4)k > 0$$

$$\Rightarrow k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

3. 중심이 (2, 3) 이고 y 축에 접하는 원의 방정식은?

- ① $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ ② $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$
③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$ ④ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$
⑤ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 5$

해설

중심이 (2,3) 일 때 y 축에 접해야 하므로
반지름의 길이는 2 이다.

4. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + k = 0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

- ① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1, (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25-k$
교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가
반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차
이상이 되어야 한다.
 $\Rightarrow \sqrt{25-k} - 1 \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \leq \sqrt{25-k} + 1$
 $\Rightarrow 25-k \leq 36, 25-k \geq 16$
 $\Rightarrow -11 \leq k \leq 9$
 \therefore 정수 k 의 개수는 21 개

5. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5cm, 12cm 이고 중심거리가 13cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

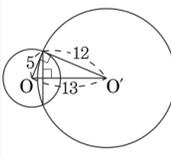
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



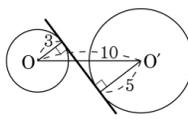
6. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
 $\overline{C_1C_2} = 5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

7. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

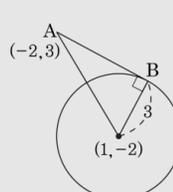
8. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 &= 0 \\(x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 3^2 \\ \text{원의 중심은 } (1, -2), \text{ 반지름은 } 3 \text{ 이므로} \\ \overline{AB} &= \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5\end{aligned}$$



9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

- ① $x + \sqrt{2}y = 4$ ② $x + \sqrt{3}y = 4$ ③ $\sqrt{2}x + y = 4$
④ $\sqrt{3}x + y = 4$ ⑤ $x - \sqrt{3} = 4$

해설

$(1, \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$$1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 4$$

10. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
직선의 방정식은
 $y - b = 2(x - a) - 3$
직선의 방정식을 정리하면
 $y = 2x - 2a - 3 + b$
원래 직선과 같아졌으므로
 $-2a + b - 3 = -3, 2a = b,$
 $\therefore \frac{b}{a} = 2$

11. 세 점(-3, 1), (5, 5), (-2, 2) 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

- ① (3, -1) ② (2, 1) ③ (4, 2)
④ (-3, -2) ⑤ (3, -2)

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots \textcircled{1}$ 이라 하면,

$\textcircled{1}$ 은 (-3, 1), (5, 5), (-2, -2)를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4, B = -2, C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 (2, 1)

12. 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p - q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0 \text{ 을}$$

표준형으로 고치면

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = 5a^2 - 20a + 25$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 20a + 25) = 5\pi(a - 2)^2 + 5\pi$$

따라서 $a = 2$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(-2, 4)$

$$\therefore p = -2, q = 4$$

$$\therefore p - q = -6$$

13. 두 점 A(-2, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 + 4x = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4y = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

해설

점 P의 좌표를 P(x,y) 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$$

즉 $4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$ 이므로

$$4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+2)^2 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$$

14. 중심이 $C(1, 2)$ 이고, 직선 $L : x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

16. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax + by = 3$ 이 될 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

공식 $x_1x + y_1y - 4 \cdot \frac{(x_1 + x)}{2} - 6 \cdot \frac{(y_1 + y)}{2} + 3 = 0$ 에 의해
 $3x + 0 - 2x - 6 - 3y + 3 = 0$
 $\rightarrow x - 3y = 3$ 이 된다.
 $\therefore a = 1, \quad b = -3$

17. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = \sqrt{3}x \pm 8$ ② $y = \sqrt{2}x \pm 8$ ③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$

④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$ ⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
 $\therefore y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
 $x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
 $D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
 $\therefore n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
 $\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름과 같으므로
 $\frac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
 $\therefore n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

18. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \dots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

19. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

20. 좌표평면 위의 두 점 A(8,0), B(0,6) 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

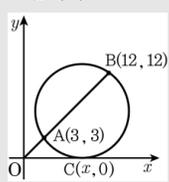
$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 C(4,3) 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

21. 좌표평면 위의 두 점 $(3, 3)$, $(12, 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$$

22. 원 $x^2 + (y-4)^2 = 4$ 가 원 $(x-4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 (0, 4), (4, 0)이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} - 2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$

23. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 8$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 이 되었다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 (a, b) 라 하면,
 $x^2 + y^2 = 8$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 의 중심인 $(4, 2)$ 의 중점은 $y = ax + b$ 위를 지나고,
두 점을 이은 직선과 $y = ax + b$ 는 수직이다.
따라서 중점인 $(2, 1)$ 를 $y = ax + b$ 에 대입하면 $1 = 2a + b$.
수직조건은 기울기의 곱이 -1 이므로
 $y = ax + b$ 의 기울기가 a 이므로
두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$.
따라서 $a = -2, b = 5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20 - c = 8$.
 $c = 12$

24. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
 $\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$
 $= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $(a-5)^2 = (a+3)^2$
 $16a = 16$
 $\therefore a = 1$
 $\therefore (a, b) = (1, 2)$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

25. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10} \text{ 일 때, } r \text{ 의 값을 구하여라.}$$

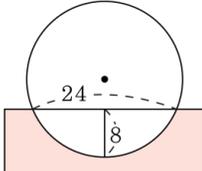
▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

26. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



- ① $6\sqrt{3}$ ② 13 ③ $8\sqrt{3}$ ④ 16 ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를

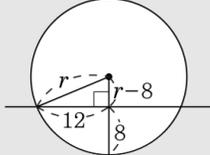
r 라 하면

피타고라스의 정리에 의하여

$$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$$

$$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$$

$$\therefore r = 13$$

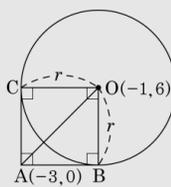


27. 점 A(-3, 0)에서 원 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = r^2$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r 의 값은? (단, $r > 0$)

- ① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = r^2$ 은 중심이 $O(-1, 6)$ 이고 반지름의 길이가 $r(r > 0)$ 인 원이다. 점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이 □ABOC는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이 된다.



이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$ 가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1 - (-3)\}^2 + (6 - 0)^2} = r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40} = r\sqrt{2}$$

$$\therefore r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

28. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

- ① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면, 두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0) 이다.

$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가 정삼각형이므로 C(a, b) 라 하면

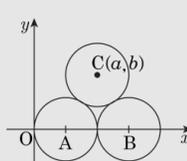
$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서 원의 중심 C(2, $\sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



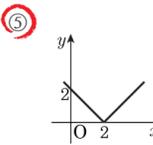
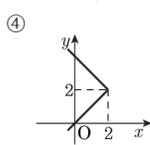
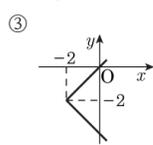
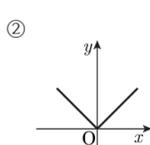
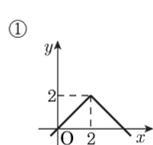
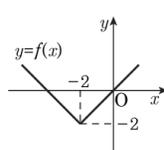
29. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 36$ 의 넓이를 이등분하는 직선 $y = mx + n$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$ 의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
 $y = mx + n$ 은 점 $(0, 1)$ 을 지난다.
 $1 = n \cdots \text{㉠}$
직선 $y = mx + n$ 을 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
 $y - 2 = m(x - 1) + n$ 이 직선이
점 $(4, -3)$ 을 지나므로
 $-5 = 3m + n \cdots \text{㉡}$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = -2, n = 1$
 $\therefore m + n = -2 + 1 = -1$

30. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2만큼 평행 이동한 것이다.

31. 이차곡선 $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$ 이 반지름 1인 원을 표시한다. 이 원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 28}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 28}{4} = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 + b^2 = 32 \cdots \text{㉠}$$

중심 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 에서

$$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \text{ 이므로}$$

$a = -2x, b = -2y$ 를 ㉠에 대입하면

$$4x^2 + 4y^2 = 32 \quad \therefore x^2 + y^2 = 8$$

$$\therefore 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$$

32. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = x^2 - 3x \dots \textcircled{A}$$

$$y = -x^2 + x + 6 \dots \textcircled{B} \text{ 이라고 하자.}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점 P 이다.

$$\textcircled{A} : y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \text{ 꼭지점 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

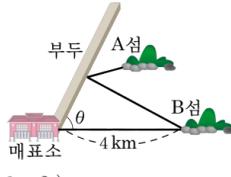
$$\textcircled{B} : y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \text{ 꼭지점 } \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

\therefore 중점 $(1, 2)$ 이 점 $P(a, b)$ 이다.

$\therefore a = 1, b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

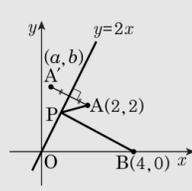
33. 다음 그림과 같이 매표소를 기준으로 동쪽으로 4 km 지점에 B 섬이 있고, 동쪽으로 2 km, 북쪽으로 2 km 떨어진 지점에 A 섬이 위치하고 있다. 또, B 섬과 부두가 이루는 각이 θ 이다. A 섬 - 부두 - B 섬을 연결하는 연륙교를 만들려고 할 때, 다리의 최소 길이를 구하면? (단, $\tan \theta = 2$)



- ① $\frac{\sqrt{130}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{130}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{130}}{5}$
 ④ $\frac{4\sqrt{130}}{5}$ ⑤ $\sqrt{130}$

해설

그림과 같이 매표소를 원점 O 라 하자. $\tan \theta = 2$ 이므로 부두는 $y = 2x$ 인 직선이다.



A 의 $y = 2x$ 에 관한 대칭점을 $A'(a, b)$ 라 하면,

i) 직선 AA' 와 $y = 2x$ 는 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-2} = -\frac{1}{2}$$

ii) $\overline{AA'}$ 의 중점 $(\frac{2+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 는 $y = 2x$ 위의 점이므로,

$$\frac{2+b}{2} = 2 \cdot \frac{2+a}{2} \text{ 에서 } b = 2a + 2$$

i), ii) 를 연립하면, $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{14}{5}$

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$ 인데

최소이기 위해서는 A', P, B 가 일직선 위에 있을 때이므로, 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{\left(4 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{14}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{130}}{5}$$