**1.** 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$, $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$

② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$

④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

**해설**

원의 중심은 두 점 $A,\ B$ 의 중점이므로,

$\left(\dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

**2.** 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 $k$ 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k \le 4$

② $\frac{1}{4} \le k \le 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-k)^2=\frac{k^2}{4}-k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4}-k>0$ 이 성립해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(k-4)k>0$

$\Rightarrow \quad k<0$ 또는 $k>4$

**3.** 중심이 $(2,\ 3)$ 이고 $y$ 축에 접하는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ ② $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$ ④ $(x+2)^2+(y+3)^2=9$

⑤ $(x-4)^2+(y-4)^2=5$

해설

중심이 $(2,3)$ 일 때 $y$ 축에 접해야 하므로
반지름의 길이는 2 이다.

**4.** 두 원 $x^2+y^2=1$ , $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 $k$ 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$

교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가 반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차 이상이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad \sqrt{25-k}-1 \le \sqrt{3^2+4^2} \le \sqrt{25-k}+1$

$\Rightarrow \quad 25-k \le 36,\ 25-k \ge 16$

$\Rightarrow \quad -11 \le k \le 9$

$\therefore$ 정수 $k$ 의 개수는 21 개

**5.** 두 원 O와 O′의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

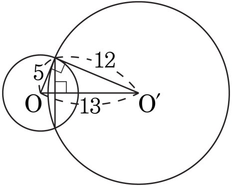
① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 $x$ 라 하면
$\triangle OO'A$는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore \ x = \frac{120}{13}$$



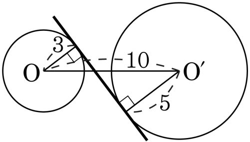
**6.** 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 $C_1$ 이라 하면 점 $C_1$ 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 $C_2$ 이라 하면 점 $C_2$ 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

**7.** 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.




▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

**8.** 점 A(−2, 3) 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

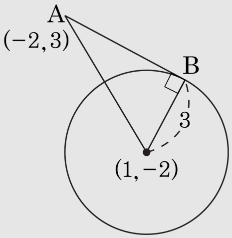
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 (1, −2), 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



**9.** 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x+\sqrt{2}y=4$ ② $x+\sqrt{3}y=4$ ③ $\sqrt{2}x+y=4$

④ $\sqrt{3}x+y=4$ ⑤ $x-\sqrt{3}=4$

**해설**

$(1,\ \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4$

$\therefore x+\sqrt{3}y=4$

**10.** 직선 $y=2x-3$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로 $a$ 만큼, $y$ 축의 방향으로 $b$ 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y=2x-3$ 의 그래프가 되었다. 이때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$ )

① $\frac{1}{2}$ ② $1$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $2$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y=2x-3$ 의 그래프를
$x$ 축의 방향으로 $a$ 만큼, $y$ 축의 방향으로 $b$ 만큼 평행이동한
직선의 방정식은
$y-b=2(x-a)-3$
직선의 방정식을 정리하면
$y=2x-2a-3+b$
원래 직선과 같아졌으므로
$-2a+b-3=-3,\ 2a=b,$
$\therefore\ \frac{b}{a}=2$

**11.** 세 점 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심 (외심) 의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(2,\ 1)$　　③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$　　⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10-3A+B+C=0 \\ 50+5A+5B+C=0 \\ 8-2A-2B+C=0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A=-4$, $B=-2$ , $C=-20$

따라서, 구하는 원은 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

즉, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

**12.** 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 $(p,q)$ 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① $-6$　② $-4$　③ $-2$　④ $2$　⑤ $4$

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2,4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

**13.** 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $x^2+y^2+4x=0$
③ $x^2+y^2-4x=0$
④ $x^2+y^2+4y=0$
⑤ $x^2+y^2-4y=0$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$
즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로
$4\left\{(x-1)^2+y^2\right\}=(x+2)^2+y^2$
$3x^2+3y^2-12x=0$
$\therefore\ x^2+y^2-4x=0$

**14.** 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 2)$이고, 직선 $\mathrm{L}\ :\ x+2y=0$에 접하는 원의 반지름을 $r$이라 할 때 $r^2$은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

**15.** 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 $a$ 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리($d$) 보다
원의 반지름 ($r$) 이 크다.

$$d=\frac{|3\times 0+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|a|}{5}<2=r$$

$$\frac{|a|}{5}<2\ ,\ |a|<10,\ -10<a<10$$

$$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \therefore 19\text{개}$$

**16.** 원 $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ 위의 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax+by=3$이 될 때, $a-b$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $1$ ④ $3$ ⑤ $4$

해설

공식 $x_1x+y_1y-4\cdot\dfrac{(x_1+x)}{2}-6\cdot\dfrac{(y_1+y)}{2}+3=0$에 의해

$3x+0-2x-6-3y+3=0$

$\rightarrow x-3y=3$이 된다.

$\therefore a=1,\quad b=-3$

**17.** 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = \sqrt{3}x \pm 8$ ② $y = \sqrt{2}x \pm 8$ ③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$

④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$ ⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
$\therefore\ y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
$x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
$x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$ , $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
$D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
$\therefore\ n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
$\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
$\dfrac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
$\therefore\ n = \pm 8$ ,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

**18.** 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 $y$절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 $m$이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$ , $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 $-2$를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 $y$절편은 5이다.

**19.** 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$
$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

**20.** 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 0)$ , $B(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 $a, b, c$ 의 곱 $abc$ 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

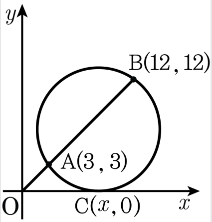
$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

**21.** 좌표평면 위의 두 점 $(3,\ 3)$, $(12,\ 12)$ 를 지나고 $x$ 축의 양의 부분과 접하는 원 $O$ 의 접점의 $x$ 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$ ② $6$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$




$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

**22.** 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $4\sqrt{2}-5$　　⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는
$\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

**23.** 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=8$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$이 되었다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면,

$x^2+y^2=8$의 중심 $(0,\ 0)$과 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$의 중심인 $(4,\ 2)$의 중점은 $y=ax+b$ 위를 지나고,

두 점을 이은 직선과 $y=ax+b$는 수직이다.

따라서 중점인 $(2\ ,\ 1\ )$를 $y=ax+b$에 대입하면 $1=2a+b$.

수직조건은 기울기의 곱이 $-1$이므로

$y=ax+b$의 기울기가 $a$이므로

두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,

따라서 $a=-2$, $b=5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20-c=8$.

$c=12$

**24.** 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

중심이 $y=x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b=a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$
$=\ \sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2=(a+3)^2$
$16a=16$
$\therefore\ a=1$
$\therefore\ (a,\ b)=(1,\ 2)$
따라서 $a+b=1+2=3$

**25.** 제1 사분면에서 $x$ 축과 $y$ 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $r$ 인 원의 중심을 $C_1$, 제2 사분면에서 $x$ 축과 $y$ 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 $C_2$, 제3 사분면에서 $x$ 축과 $y$ 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 $C_3$, 제4 사분면에서 $x$ 축과 $y$ 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 $C_4$ 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}=14\sqrt{10}$ 일 때, $r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$

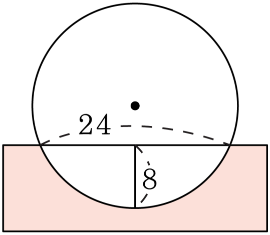
$+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$

$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$

$\therefore r=16$

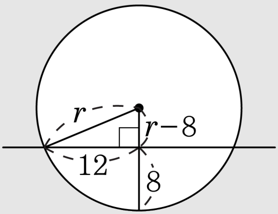
**26.** 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?




① $6\sqrt{3}$ ② 13 ③ $8\sqrt{3}$ ④ 16 ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를
$r$라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$
$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
$\therefore r = 13$

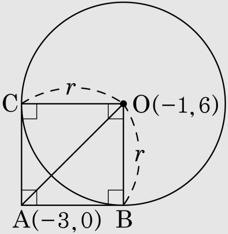


**27.** 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, $r$의 값은? (단, $r>0$ )

① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이 O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이 □ABOC는 한 변의 길이가 $r$인 정사각형이 된다.




이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

**28.** 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 $C_3$ 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 $C_3$ 의 중심까지의 거리를 $d$ , 원 $C_3$ 의 반지름의 길이를 $r$ 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

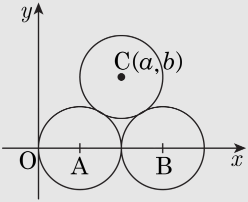
① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0) 이다.
$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가 정삼각형이므로 C($a$, $b$) 라 하면
$a = 1 + \overline{AC}\cos 60°$, $b = \overline{AC}\sin 60°$
$\therefore$ C$(2,\ \sqrt{3})$
따라서 원 $C_3$ 는 중심이 $(2,\ \sqrt{3})$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서 원의 중심 C$(2,\ \sqrt{3})$ 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



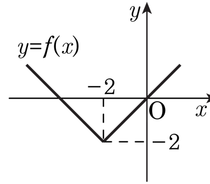
**29.** 원 $x^2+(y-1)^2=36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx+n$을 $x$축의 방향으로 1만큼 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 $m, n$에 대하여 $m+n$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

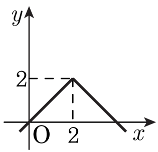
해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y=mx+n$은 점 $(0,1)$을 지난다.
$1=n \cdots$ ㉠
직선 $y=mx+n$를 $x$축의 방향으로 1만큼,
$y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y-2=m(x-1)+n$이 직선이
점 $(4,-3)$을 지나므로
$-5=3m+n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2, n=1$
$\therefore m+n=-2+1=-1$

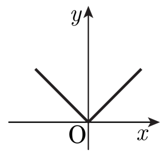
**30.** 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



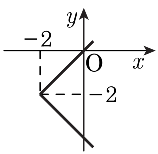

①



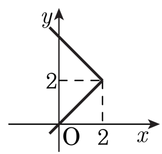

②



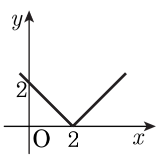

③




④




⑤




해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를
$y$ 축에 대칭시킨 후 $y$ 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

**31.** 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1인 원을 표시한다. 이 원의 중심 $a$, $b$ 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$$

$\dfrac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$㉠

중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$ 에서

$x=-\dfrac{a}{2},\ y=-\dfrac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$

**32.** 곡선 $y=x^2-3x$ 와 $y=-x^2+x+6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$y=x^2-3x \quad \cdots$ ㉠

$y=-x^2+x+6 \quad \cdots$ ㉡이라고 하자.

㉠, ㉡이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y=x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

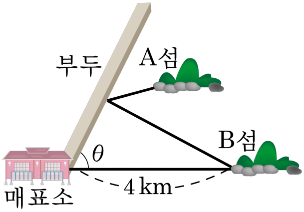
㉡ : $y=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+6$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 이다.

$\therefore\ a=1,\ b=2$ 이므로 $a+b=3$

**33.** 다음 그림과 같이 매표소를 기준으로 동쪽으로 4 km 지점에 B 섬이 있고, 동쪽으로 2 km , 북쪽으로 2 km 떨어진 지점에 A 섬이 위치하고 있다. 또, B 섬과 부두가 이루는 각이 $\theta$ 이다. A 섬 - 부두 -B 섬을 연결하는 연륙교를 만들려고 할 때, 다리의 최소 길이를 구하면? (단, $\tan\theta = 2$ )

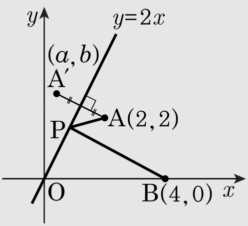



① $\dfrac{\sqrt{130}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{130}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{130}}{5}$

④ $\dfrac{4\sqrt{130}}{5}$ ⑤ $\sqrt{130}$

해설

그림과 같이 매표소를 원점 O 라 하자.
$\tan\theta = 2$ 이므로 부두는 $y = 2x$ 인 직선이다.
A 의 $y = 2x$ 에 관한 대칭점을 $A'(a,\ b)$ 라 하면,




i ) 직선 AA′ 와 $y = 2x$ 는 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-2} = -\frac{1}{2}$$

ii ) $\overline{AA'}$ 의 중점 $\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{2+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이므로,

$\dfrac{2+b}{2} = 2 \cdot \dfrac{2+a}{2}$ 에서 $b = 2a + 2$

i ), ii )를 연립하면, $a = \dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{14}{5}$

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$ 인데
최소이기 위해서는 A′ , P, B 가 일직선 위에 있을 때이므로,
최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{\left(4-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{14}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{130}}{5}$$