

1. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k \leq 4$

② $\frac{1}{4} \leq k \leq 4$

③ $0 < k < 4$

④ $k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y - k)^2 = \frac{k^2}{4} - k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4} - k > 0$ 이 성립해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(k - 4)k > 0$$

$$\Rightarrow k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

2. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

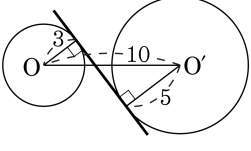
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

3. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

4. 방정식 $x^2 + y^2 - 7y = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 + x - x + 2 = 0$
② $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 5 = 0$
③ $x^2 + y^2 - 8x - 3y + 6 = 0$
④ $2x^2 + y^2 - 9x + 4y + 3 = 0$
⑤ $4x^2 + y^2 + 2x - y + 9 = 0$

해설

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 - 7(y+2) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 3y + 6 = 0$$

5. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를
 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
 $3(x - 2) + 4(y + 3) - 5 = 0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x + 4y + 1 = 0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

6. 점 $(2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 $(2, 3)$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 $(2, 3)$ 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6 만큼 평행이동 시킨 것과 같다
 $\therefore m + n = -4 - 6 = -10$

7. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

8. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 4a - 5 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y+a)^2 &= 2a^2 + 4a + 5 \\ &= 2(a+1)^2 + 3\end{aligned}$$

따라서 $a = -1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a, -a) = (-1, 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

9. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

10. 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 위의 한 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $4x + 3y - 10 = 0$

② $3x + 4y - 10 = 0$

③ $4x + 3y - 20 = 0$

④ $3x + 4y - 20 = 0$

⑤ $4x + 2y - 25 = 0$

해설

공식에 대입하면

$(x_1 - 1)(x - 1) + (y_1 + 2)(y + 2) = 25$ 에서

$x_1 = 4, y_1 = 2$ 이므로 $3x + 4y - 20 = 0$

11. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

12. 점 A(0, a) 에서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y = mx + a$ 이다. 원의 중심 (0, 2) 에서 직선 $mx - y + a = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m \times 0 - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$

$\therefore |a - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2 - (a^2 - 4a - 5) = 0$ 이 방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$$m_1 m_2 = -\frac{1}{9}(a^2 - 4a - 5) = -1, a^2 - 4a - 14 = 0$$

$$\therefore a = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$$(2 + 3\sqrt{2}) + (2 - 3\sqrt{2}) = 4$$

13. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4) 이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$

까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

14. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

- ① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm
④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

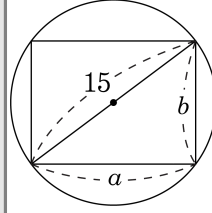
i) $a + b = \frac{42}{2} = 21$

ii) $a^2 + b^2 = 15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2 + (21 - a)^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow a = 12, 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$ 를 대입

$$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$$

2) x 축으로 -1 , y 축으로 3 이동

$$\Rightarrow -(y - 3) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$$

$$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a + b)x + 3 - a - b - c$$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$$\therefore a = -2, b = 4, c = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c = 3$$

16. 도형 $y = 2x + 3$ 을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $2x - y + 5 = 0$

② $2x + 2y - 5 = 0$

③ $2x + y + 5 = 0$

④ $2x - y - 5 = 0$

⑤ $2x - 2y + 5 = 0$

해설

점 (a, b) 에 대하여 대칭이동하려면

$x \rightarrow 2a - x$, $y \rightarrow 2b - y$ 를 대입하면 된다. $y = 2x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 (a, b) 의 중점 $(2, 3)$

$$\frac{0+a}{2} = 2, \frac{3+b}{2} = 3$$

$$a = 4, b = 3$$

$\therefore y = 2x + 3$ 과 기울기는 동일하며 $(4, 3)$ 지남.

$$\rightarrow y = 2x + b, (4, 3) \rightarrow 3 = 8 + b \rightarrow b = -5$$

$$\therefore y = 2x - 5$$

17. 직선 $2x + ay + b = 0$ 에 대하여 점 A (3, 2) 와 대칭인 점을 B (-1, 0) 이라고 할 때, 상수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하여라.

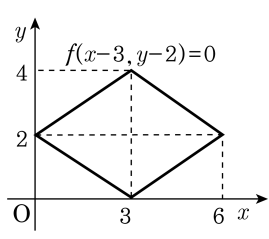
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 점 A (3, 2) , B (-1, 0) 에 대하여
 $\overline{AB}$ 의 중점 (1, 1) 이
직선 $2x + ay + b = 0$ 위에 있으므로
 $2 + a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$
직선 AB 와 직선 $2x + ay + b = 0$,
즉 $y = -\frac{2}{a}x - \frac{b}{a}$ 가 수직이므로
$$\frac{2-0}{3-(-1)} = \frac{a}{2}$$
$$\therefore a = 1$$
이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -3$
$$\therefore ab = -3$$

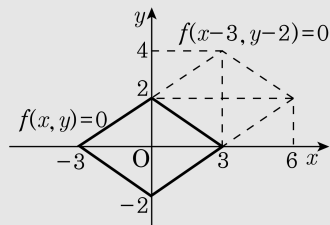
18. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표 평면 위에 바르게 나타낸 것은?



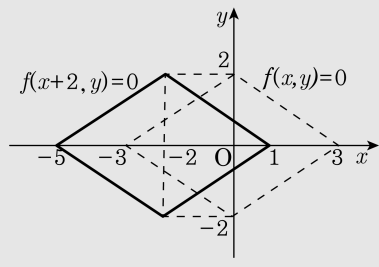
- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



19. 원 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① (2, -1)

② (3, -2)

③ (2, -2)

④ (-1, -2)

⑤ (3, -1)

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면

$$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

20. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
- ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
- ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

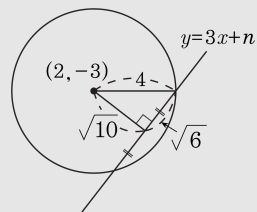
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

21. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리

$$\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|9 + n| = 10$$

$$\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$$

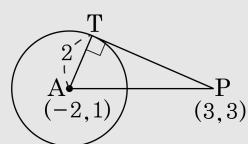
$$\therefore 1 - 19 = -18$$

22. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

- ① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 (-2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$

23. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

24. 점 $(1, -1)$ 에서 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

- ① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
 $y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

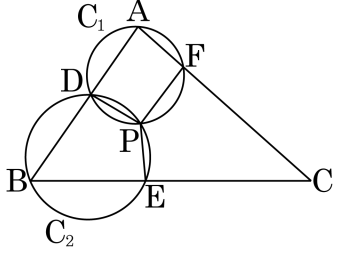
따라서 $1 = \frac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}},$

$| -2m-3 | = \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4 이다.

25. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180^\circ$
 $\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180^\circ$
 $\angle DPF + \angle DPE = 360 - (\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}})$ 에서
 $\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$
 $\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$
 따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, 다

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- 1

(가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
- 2
- (가)
- $\angle B$
- , (나)
- $\angle A$
- , (다)
- C_1, C_2, C_3
- 은 한 점
- P
- 에서 만난다.

3

4

5

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180^\circ$
 □BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180^\circ$
 따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$
 $\angle FPE = \angle A + \angle B$
 $\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$
 따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
 세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

26. a 는 실수이고 원 $x^2 - 2ax + y^2 - 4|a|y + 5a^2 - 1 = 0$ 의 중심과 점 $(-3, 1)$ 과의 거리를 $f(a)$ 라고 할 때, $f(a)$ 의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 3

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x-a)^2 + (y-2|a|)^2 = 1$$

$\therefore$ 중심 $(a, 2|a|)$

$$\begin{aligned}\therefore f(a) &= \sqrt{(a+3)^2 + (2|a|-1)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 + 6a - 4|a| + 10}\end{aligned}$$

(i) $a \geq 0$ 일 때

$$f(a) = \sqrt{5a^2 + 2a + 10}$$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}} \geq \sqrt{10}$$

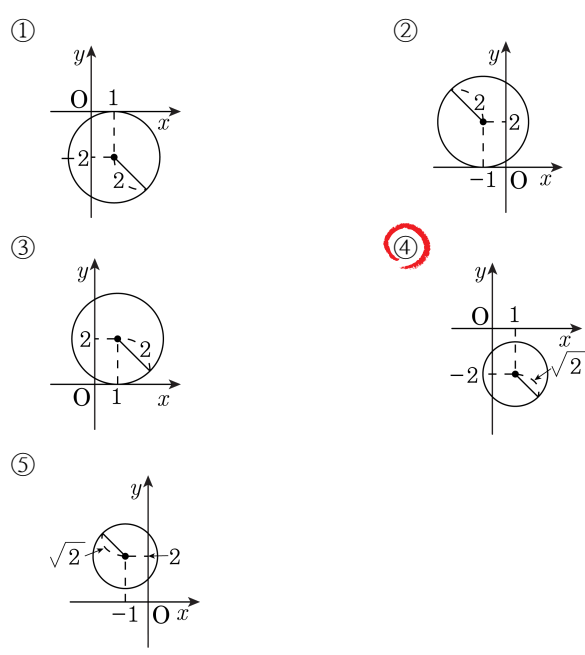
(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(a) = \sqrt{5a^2 + 10a + 10}$$

$$= \sqrt{5(a+1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

따라서 $f(a)$ 의 최솟값은 $\sqrt{5}$

27. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
 $\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

28. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$
이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로
 $a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$
두 식을 연립하면
 $4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a-5)(a-15) = 0$
그런데
 $0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = 5, b = 5$ 이다.
이 때, 직선 AB 의 방정식은
 $y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$
 $\therefore x + 2y - 10 = 0$
따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는
 $d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$

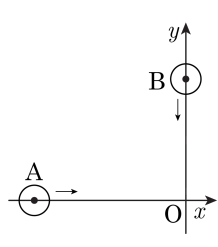
29. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 는 중심이 (a, b) 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ 0

해설

P = (α, β) 라 하면,
 $G = \left(\frac{-5+2+\alpha}{3}, \frac{-2+5+\beta}{3} \right)$
 $= \left(-1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$
 $-1 + \frac{\alpha}{3} = p, \quad 1 + \frac{\beta}{3} = q$ 라 하면,
 $\alpha = 3p + 3, \quad \beta = 3q - 3, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 9$ 이므로
 $\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$
 $\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$
 $\Rightarrow$ 중심이 $(-1, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원
 $\therefore a + b + c = 1$

30. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10, 0)$ 은 x 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0, 8)$ 은 y 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?

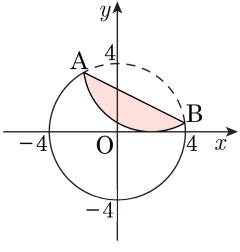


- ① $t = 2, 4$
 ② $t = 4, 6$
 ③ $t = 8, 10$
- ④ $t = 12, 14$
 ⑤ $t = 16, 18$

해설

t 초 후 $A(-10 + t, 0)$, $B(0, 8 - t)$ 에 위치.
 t 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면
 $d^2 = (8 - t)^2 + (10 - t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$
 접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가
 두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,
 $\sqrt{(8 - t)^2 + (10 - t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$
 $\therefore 2t^2 - 36t + 160 = 0$
 $\therefore t^2 - 18t + 80 = 0$
 $\therefore t = 8, 10$

31. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 (2, 0) 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



- ① $x + 2y - 4 = 0$ ② $x + 2y - 5 = 0$
 ③ $2x + y - 6 = 0$ ④ $2x + y - 5 = 0$
 ⑤ $2x + y - 4 = 0$

해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,

x 축과 점 (2, 0) 에서 접하므로

중심의 좌표가 (2, 4) 가 된다.

즉, 새로운 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$$

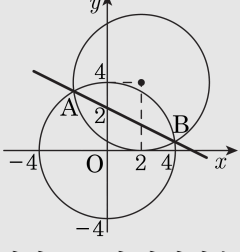
이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 16) - (x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4) = 0$$

$$4x + 8y - 20 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$



32. 두 원 $x^2+y^2+2x-2my+m^2-4=0$, $x^2+y^2-2mx-2y+m^2-8=0$ 이 직교할 때 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}$

▷ 정답 : $-\sqrt{6}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로
 $(x+1)^2+(y-m)^2=5$
 $(x-m)^2+(y-1)^2=9$
두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로
 $(m+1)^2+(1-m)^2=14$
 $m^2=6$
 $m=\pm\sqrt{6}$

33. 중심이 직선 $y = x (x > 0)$ 위에 있고, 점 $(2, 0)$ 을 지나는 원이 있다. 원점에서 이 원 위의 임의의 점까지의 거리의 최대값이 $2\sqrt{2}$ 일 때, 이 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

④ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

⑤ $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 20$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로

중심을 (a, a) 라고 하자.

원은 반지름이 r 이라고 하면,

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

$(2, 0)$ 을 지나므로,

$$(a-2)^2 + a^2 = r^2$$

거리의 최대값은 원점에서 중심까지의 거리에

반지름만큼 더한 값이므로,

$$2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + a^2} + r = a\sqrt{2} + r$$

$$\therefore r = \sqrt{2} \cdot (2-a)$$

위의 $(a-2)^2 + a^2 = r^2$ 에 대입하면

$$\therefore a = 1 \quad \therefore r = \sqrt{2}$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$