1. 다음 중 옳지 <u>않게</u> 연결된 것은?

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 3, 5\}$

② $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

③ $\{x \mid x$는 12의 약수$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

④ $\{x \mid x$는 20미만의 4의 배수$\} = \{4, 8, 12, 16\}$

⑤ $\{x \mid x = 2 \times n + 1,\ 1 \le n \le 3,\ n$은 자연수$\} = \{3, 5, 7\}$

해설

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다.

2. 다음 중 원소의 개수가 0 이 아닌 유한집합은?

① $\{x \mid x$는 일의 자리의 숫자가 1인 짝수$\}$

② $\{x \mid x$는 2로 나누었을 때 나머지가 1 인 자연수 $\}$

③ $\{x \mid x$는 8보다 큰 8의 약수$\}$

④ $\{x \mid x$는 두 자리의 2의 배수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 $1 < x < 2$인 분수$\}$

해설

① $\varnothing$

② $\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$

③ $\varnothing$

④ $\{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \cdots,\ 98\}$

⑤ $\left\{\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots\right\}$

3. 세 집합

$A = \{w,\ x,\ y,\ z\}$,

$B = \{x \mid x$는 30 미만의 30의 약수$\}$,

$C = \{x \mid x$는 25 이하의 소수$\}$ 일 때,

$n(A) + n(B) + n(C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$

$C = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23\}$

$\therefore\ n(A) + n(B) + n(C) = 4 + 7 + 9 = 20$

4. 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 집합 $A = \{x \mid x$는 3보다 크고 10보다 작은 짝수$\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 3 개

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = \{4, 6, 8\}$ 이므로 $B = \{4, 6, 8\}$
따라서 $n(B) = 3$ 이다.

5. 집합 $A = \{x \mid |x-1| = 1\}$, $B = \{x \mid 2x - 1 < 9\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$일 때, 세 집합 A, B, C의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$　② $A \subset C \subset B$　③ $B \subset A \subset C$

④ $B \subset C \subset A$　⑤ $C \subset A \subset B$

해설

$|x-1| = 1, x-1 = \pm 1$ 이므로 $x = 0, 2$

$\therefore A = \{0, 2\}$

$B = \{x \mid 2x - 1 < 9\} = \{x \mid 2x < 10\} = \{x \mid x < 5\}$

$C = \{x \mid -3 < x < 3\}$

$\therefore A \subset C \subset B$

6. 두 집합 A, B에 대하여 $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cap B = \{3, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$일 때, 집합 A는?

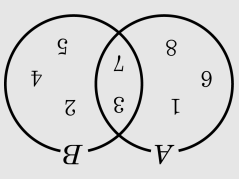
① $\{2, 3, 4, 7\}$ ② $\{2, 3, 6, 7\}$

③ $\{1, 3, 6, 7\}$ ④ $\{1, 3, 6, 7, 8\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

해설

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



그러므로 집합 $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$이다.

7. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30　② 33　③ 40

④ 42　⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

8. 전체집합 $U = \{a, e, i, o, u\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, e, u\}, B = \{e, i\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $A^c = \{i, o, u\}$	㉡ $A - B = \{a, u\}$
㉢ $A - B^c = \{a, i, u\}$	㉣ $B^c - A = \{a, i, u\}$
㉤ $B - A = \{i\}$	㉥ $B^c = \{a, i, o, u\}$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

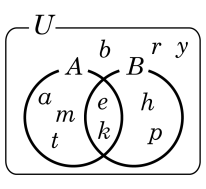
▷ 정답: ㉤

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

㉠ $A^c = \{i, o\}$
㉡ $A - B = \{a, u\}$
㉢ $A - B^c = \{e\}$
㉣ $B^c - A = \{o\}$
㉤ $B - A = \{i\}$
㉥ $B^c = \{a, o, u\}$

9. 아래 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $A - B = \{a, t, m\}$

② $B - A = \{h, p\}$

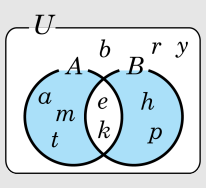
③ $(A - B)^c = \{b, e, h, k, p, r, y\}$

④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, e, h, m, p, t\}$

⑤ $A - B^c = \{e, k\}$

해설

④ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, h, m, p, t\}$



10. 자연수의 집합 N에서 자연수 k의 배수의 집합을 N_k로 나타낼 때, $(N_{18} \cup N_{12}) \subset N_k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$N_{18} \cup N_{12}$
$= \{18,\ 36,\ 54,\ 72, \cdots\}$
$\cup \{12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\ \cdots\}$
$= \{12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 48,\ 54,\ 60,\ \cdots\} \subset N_k$
$\therefore k$의 최댓값은 6

11. $x,\ y,\ z$ 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$

② $x,\ y,\ z$ 는 서로 다르다.

③ $x\neq y$ 이고 $y\neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x)>0$

⑤ $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$
즉, $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

12. 명제 '$|x-3| < a$ 이면 $1 < x < 7$이다.' 가 참이 되기 위한 양수 a의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$-a < x-3 < a \Rightarrow 3-a < x < 3+a$

$\{x|3-a < x < 3+a\} \subset \{x|1 < x < 7\}$

$\therefore 1 \le 3-a$과 $3+a \le 7$을 동시에 만족해야 한다.

$\therefore a \le 2$

13. 명제 '$x^2+2x+a\neq 0$ 이면 $x+1\neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

대우인 '$x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=0$

$\therefore\ a=1$

14. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이 아닌 것은? (단 a, b, c 는 실수)

① $p : a = b,\ q : ac = bc$

② $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$ 또는 $b = 0$

③ $p : \triangle ABC$ 는 이등변삼각형, $q : \angle B = \angle C$

④ $p : a = 1,\ q : a^2 - 3a + 2 = 0$

⑤ $p : 0 < a < b,\ q : a^2 < b^2$

해설

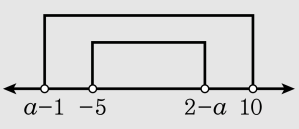
① $q : ac = bc \rightarrow a = b$ 또는 $c = 0$ (참)
② $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$(참)
③ $\angle B \neq \angle C \rightarrow \triangle ABC$는 이등변 삼각형이 아니다. (거짓)
반례 : $\angle C = \angle A$ 인 이등변 삼각형
④ $q : a = 1,\ 2$ (참)
⑤ $(0 < a < b) \subset (a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < a < b$ 또는 $b < a < 0)$

15. 다음 두 조건 $p : a-1 < x \le 10$, $q : -5 < x \le 2-a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는
$\{x \mid -5 < x < 2-a\} \subset \{x \mid a-1 < x < 10\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$a-1 \le -5$, $2-a \le 10$

$\therefore\ -8 \le a \le -4$

16. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$\quad -a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
$(|a| + |b| + |c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
$|a||b| \geq ab$, $|b||c| \geq bc$, $|c||a| \geq ca$
$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2$ ($\because |a||b| \geq ab$)
$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

17. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1) \geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1) \leq 0$이어야 하므로

$a^2+2a+1-4a-4$

$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3으로 5개

18. 양수 $x,\ y$에 대하여 $\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(3y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

19. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 9의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 $\square$의 배수$\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$안에 들어갈 수 있는 수를 모두 골라라.

2, 3, 9, 11, 15, 18

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 9

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$는 9 의 약수이어야 한다. 따라서, $\square$안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 9 중 하나이며 보기 중에는 3, 9 이다.

20. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 120

해설

'적어도~ '문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$
$\therefore 128 - 8 = 120$

21. 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cup B = B \cup A$　② $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \varnothing$　④ $B \cap \varnothing = \varnothing$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

22. 두 집합 $A = \{a,\ 5,\ a+6\}$, $B = \{x|x$는 14의 약수$\}$ 에서 $A \cap B = \{1,\ 7\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$1 \in A$ 이므로 $a = 1$ 또는 $a + 6 = 1$ 이다.
(i) $a = 1$ 이면 $A = \{1, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 7\}$ 이다.
$\therefore\ a = 1$
(ii) $a + 6 = 1$ 즉, $a = -5$ 이면 $A = \{-5,\ 1,\ 5\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
그러므로 $a = 1$ 이다.

23. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \cup \varnothing = \varnothing$

④ $A \subset B$, $B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \cup \varnothing = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

24. 집합 $A=\{2,3\times a,a+3\}, B=\{a,2\times a+1,3\times a-2\}$ 이고 $A-B=\{6\}$ 일 때, $C=\{1,2,3\}$ 에 대하여 $(A-C)\cup(B\cap C)$ 는?

① $\{2,4\}$ ② $\{2,5\}$ ③ $\{2,6\}$

④ $\{2,5,6\}$ ⑤ $\{2,6,7\}$

해설

$A-B=\{6\}$ 이므로

(1) $3\times a=6$ 일 때, $a=2$ 이다.

따라서 $A=\{2,5,6\}, B=\{2,4,5\}$ 이고 $C=\{1,2,3\}$ 이므로

$(A-C)\cup(B\cap C)=\{5,6\}\cup\{2\}=\{2,5,6\}$ 이다.

(2) $a+3=6$ 일 때, $a=3$ 이다.

따라서 $A=\{2,6,9\}, B=\{3,7\}$ 이므로 $A-B=\{2,6,9\}\neq\{6\}$ 이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1),(2)에서 $(A-C)\cup(B\cap C)=\{2,5,6\}$ 이다.

25. 전체집합U 의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 집합연산이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

③ $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

④ $(A\cup C)-(B\cup C)=A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cup C)$

해설

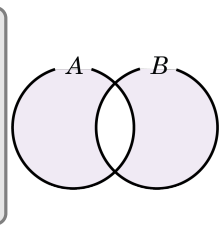
① (좌변)
$=(A-B)\cup(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=A\cap(B\cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
$=A-(B\cap C)$
=우변 ($\because$ 차집합의 성질)
② (우변)
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
③ (좌변)
$=(A-C)\cup(B-C)$
$=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cup B)\cap C^c$
$=(A\cup B)-C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
④ 좌변
$=(A\cup C)-(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B\cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B^c\cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$ (우변)
⑤ 좌변
$=A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)\neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

26. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$로 정의할 때, 다음 중에서 $(A\triangle B)\triangle A$와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A\cap B$ ④ $A\cup B$ ⑤ $A-B$

해설

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A\triangle B)\triangle A = [(A\triangle B)-A]\cup[A-(A\triangle B)] = (B-A)\cup(A\cap B) = B$



27. 집합 $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ $\Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 15$ (개)

28. 집합 $P = \{2x+1 | x$는 6보다 작은 자연수$\}$ 의 부분집합 $A = \{3,5\}, B = \{5,7,9\}$ 에 대하여 $A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

$P = \{2x+1 | x$는 6보다 작은 자연수$\} = \{3,5,7,9,11\}$
$A = \{3,5\}, B = \{5,7,9\}$
$A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 X 는 원소 $3,7,9$ 를 반드시 포함하는 집합 P 의 부분집합이다.
따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-3} = 4$ (개)

29. 이차함수 $f(x) = x^2 + x - 2$에서 $X = \{n | 1 \le n \le 100,\ n$은 정수$\}$, $Y = \{y | y = f(n),\ n \in X\}$이고 집합 Y의 원소가 3의 배수일 때 $n(X \cap Y^c)$ 값을 구하면?

① 60 ② 86 ③ 98 ④ 102 ⑤ 126

해설

$f(n) = n^2 + n - 2 = (n+2)(n-1)$
$n+2$ 와 $n-1$ 의 차이가 3 이므로 $n+2$ 가 3 의 배수이면 당연히 $n-1$ 도 3 의 배수가 된 $n+2 = 3k,\ n = 3k-2$
$n = 1$일 때 : $f(1) = 0$
$n = 4$일 때 : $f(4) = 18$
$n = 7$일 때 : $f(7) = 54$
$n = 10$일 때 : $f(10) = 108 \cdots$ 에서
$X = \{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 100\}$, $X \cap Y = \{18,\ 54\}$
$n(X \cap Y^c) = n(X - Y) = 98$

30. 60명의 학생이 세 개의 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 할 때, $n(A)=42$, $n(B)=36$, $n(C)=27$, $n(A\cap B\cap C)=10$이다. $n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$를 구하면 ?

① 5 ② 15 ③ 25 ④ 35 ⑤ 45

해설

$n(A\cup B\cup C)=60$ 이므로,
$60=42+36+27-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}+10$
따라서, $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap B)=55$
$\therefore n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$-3n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=55-3\times10+10=35$

31. 전체 50 명인 학급에서 감기에 걸리지 않은 남학생 수는 10 명, 감기에 걸린 남학생 수는 a 명, 감기에 걸린 여학생 수는 b 이다. 남학생과 여학생의 비율이 3 : 2 일 때, 감기에 걸리지 않은 여학생의 수는 최대 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 20 명

해설

남학생의 집합을 A , 여학생의 집합을 B , 감기에 걸린 학생의 집합을 C , 감기에 걸리지 않은 학생의 집합을 D 라 두고 표를 그려 보면,
감기에 걸리지 않은 여학생의 수는 $(40 - a - b)$ 명이고,
$2 \times (10 + a) = 3 \times (40 - a)$ 이다. $\rightarrow a = 20$
$\therefore$ 감기에 걸리지 않은 여학생의 수$= 40 - 20 - b$ 이므로, 최대 20 명이다.

32. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$
$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$

33. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$㉡

㉠$\times 2+$㉡하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\le -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$