1. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$가 -3이므로 $-3 + 5 = 2$

2. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$$z = \frac{2}{1-i} = 1 + i$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

3. 복소수 $z = a + bi$일 때, z의 켤레 복소수 $\bar{z} = a - bi$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, a, b는 실수)

① $\overline{2+i} = 2 - i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2 + \sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i + 1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켤레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i - 1$의 허수부분은 i이므로 $\overline{i-1} = -i - 1$이다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

4. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$ ② $\pm(2-3i)$ ③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$ ⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ 에서

$a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2 - b^2 = 5$, $2ab = -12$ 에서

$ab = -6$, $b = -\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2 - \left(-\dfrac{6}{a}\right)^2 = 5$, $a^2 - \dfrac{36}{a^2} = 5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$, $(a^2-9)(a^2+4) = 0$

따라서 $a^2 = 9$ 또는 $a^2 = -4$ 이므로

$a = \pm 3$ 또는 $a = \pm 2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a = \pm 3$ 이고, $b = \mp 2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

5. 실수 x 에 대하여 $|x-2|^2 - |3-x|^2 - \sqrt{-9} + \sqrt{-16}$ 을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5 ② $2x-4$ ③ $2x$

④ $2x-5$ ⑤ 0

해설

$$(준식) = (x-2)^2 - (3-x)^2 - 3i + 4i$$
$$= 2x - 5 + i$$
$$\therefore a = 2x-5 \text{ , } b = 1$$
$$\therefore a + b = 2x - 4$$

6. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

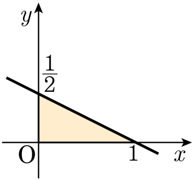
$(\text{준식}) = (2x-2y)+(x+2y-1)\,i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



7. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$\quad = 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

8. 등식 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=1-\dfrac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

$$(\text{좌변})=\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{1-2i}$$

$$=\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$\dfrac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$$\frac{x+y}{5}+\frac{2(y-x)i}{5}=1-\frac{i}{5}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5}=1\ ,\ \frac{2(y-x)}{5}=-\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{11}{4},\ y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 16xy=16\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{4}=99$$

9. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$　② $x=\frac{1}{2}$, $y=1$　③ $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$

④ $x=1$, $y=1$　⑤ $x=1$, $y=\frac{1}{2}$

해설

$$(x+y)+(x-y)i=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad x+y=\frac{1}{2},\quad x-y=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2},\quad y=1$$

10. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$ 을 간단히 하면?

① $-2i$ ② $-i$ ③ $2i$ ④ i ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

11. $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{1}{3\omega^2+4\omega+2}=a+b\omega$ 를 만족하는 실수 a, b 의 값에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ $-\dfrac{4}{3}$

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면,

$4\omega^2+4\omega+4=0$

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned}3\omega^2+4\omega+2&=3(\omega^2+\omega+1)+\omega-1\\&=\omega-1\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\omega-1}=a+b\omega$ 에서

$(a+b\omega)(\omega-1)=1$

$(a-2b)\omega-(a+b)=1 \leftarrow \omega^2=-\omega-1$

$\therefore\ a-2b=0,\ a+b=-1$ 에서

$a=-\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=-1$

12. 복소수 $z=x+yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선

③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선

⑤ 원

해설

$$(3-4i)z=(3-4i)(x+yi)$$
$$=(3x+4y)+(-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y=\dfrac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$기울기가 양인 직선)

13. 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　　② 7　　③ 5　　④ 4　　⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore\ \dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4,\ -x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3,\ y=1$

따라서, $2x+y=2\times3+1=7$

14. 정수 n에 대하여, $z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$ 에서

$n = 1$ 일 때, $i + \dfrac{1}{i} = i - i = 0$

$n = 2$ 일 때, $-1 + \dfrac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$

$n = 3$ 일 때, $-i + \dfrac{1}{-i} = 0$

$n = 4$ 일 때, $1 + \dfrac{1}{1} = 2$

따라서, $z = -2,\ 0,\ 2$이므로 3개이다.

15. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$ ② 2 ③ $2i$
④ 4 ⑤ $2 + 3i$

해설

$\alpha = 1 - i$, $\overline{\alpha} = 1 + i$

$\alpha + \overline{\alpha} = 2, \alpha\overline{\alpha} = 2$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha} &= \alpha\overline{\alpha}(\alpha + \overline{\alpha}) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

16. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

17. $x=2007,\ y=4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi}+\dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$$
$$=\frac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$=\frac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$=0$$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$$
$$=\frac{i(y-xi)}{y-xi}+\frac{-i(x+yi)}{x+yi}$$
$$=i+(-i)$$
$$=0$$

18. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$= a + 1 - (2 - a)$

$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0,\ a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$

$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

19. 복소수 z의 실수 부분이 음수일 때 $z^2 = 4i$를 만족하는 z에 대하여 $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{4k+1}$ 의 값을 구하면? (단, k는 양의 정수)

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ $\frac{1}{2}i$

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$: 실수)라 하면

$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = 4i$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 0,\ ab = 2 \ \rightarrow\ (a+b)(a-b) = 0,\ ab = 2$

i) $a + b = 0$이면 $ab = 2$에서 $-a^2 = 2$

$\therefore\ a = \pm\sqrt{2}i$ (부적합)

ii) $a - b = 0$이면 $ab = 2$에서 $a^2 = 2$

$\therefore\ a = \pm\sqrt{2},\ \ a < 0$이므로

$a = -\sqrt{2}\ \ \therefore\ b = -\sqrt{2}$

$\therefore\ z = a + bi = -\sqrt{2}(1+i),\ \ \bar{z} = -\sqrt{2}(1-i)$

$$\therefore\ \frac{z}{\bar{z}} = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\therefore\ \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{4k+1} = i^{4k+1} = (i^{4k}) \cdot i = i$$

20. $a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2 + 4a + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a + 1 = 0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$

$\therefore\ a^3 = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\ &= a^2 \\ &= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$